

TÜREVİN POLİNOMA UYGULANIŞI

$P(x)$ bir polinom ve $x=a$ bu polinomun n katlı bir kökü ise, başka bir deyişle $P(x)$ polinomu $(x-a)^n$ ile tam bölünüyorsa, $P(x)$ polinomu ve $n-1$. mertebeye kadar türevi $x=a$ için sıfır olur. Yani
 $P(a)=0, P'(a)=0, P''(a)=0, \dots, P^{(n-1)}(a)=0$

Örnek...1:

$f(x)=mx^2+2x+n$ fonksiyonu $(x-2)^2$ ile tam bölünebiliyorsa m ve n çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 & f'(2) &= 0 & f(x) &= 2mx+2 \\ 4m+4+n &= 0 & f'(2) &= 4m+2=0 \\ 2+n &= 0 & n &= -2 & m &= -1/2 \\ m \cdot n &= 1/4 \end{aligned}$$

Örnek...2:

$f(x)=2x^3-mx+a$ fonksiyonu $(x+1)^2$ ile bölün-
 düğünde kalan $3x-4$ ise m, a ?

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x-4) + (x+1)^2 \cdot k \\ f(x) &= 3x-4 + x^2+2x+1 \\ x=-1 &\Rightarrow -2+m+3+2+4=0 \\ &\Rightarrow m = -8 \\ x=1 &\Rightarrow 6-m-3=0 \\ &\Rightarrow m = 3 \\ m \cdot a &= -24 \end{aligned}$$

Örnek...3:

$f(x)=x^5+mx^4-2x+n$ fonksiyonunun bir çarpanı
 $(x-1)^2$ ise (m, n) ?

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f'(1) &= 0 & f(x) &= 5x^4+4mx^3-2x+n \\ 1-m-2+n &= 0 & f'(1) &= 5+4m-2=0 \\ 1-\frac{3}{4}-2+n &= 0 \Rightarrow n = \frac{7}{4} & m &= -3/4 \\ (m, n) &= (-3/4, 7/4) \end{aligned}$$

Örnek...4:

$(x-3).f(x)=x^2+mx$ ise $f(3)$ kaçtır?

$$x=3 \Rightarrow 0 = 9+3m \Rightarrow m = -3$$

$$[(x-3).f(x)]' = (x^2-3x)'$$

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x)(x-3) &= 2x-3 \\ f(3) &= 3 \end{aligned}$$

Örnek...5:

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ fonksiyonunun üç katlı
 kökü 1 ise a ile b arasında hangi bağıntı
 vardır?

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f'(1) &= 0 & f''(1) &= 0 \\ f'(x) &= 4x^3+3ax^2+2bx+c \\ f''(x) &= 12x^2+6ax+2b \\ 12+6a+2b &= 0 \Rightarrow 3a+b &= -6 \end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x)=3x^2+mx+n$ fonksiyonu $(x-2)^2$ ile tam bölünebiliyorsa m ve n çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 & f'(2) &= 0 & f'(x) &= 6x+m \\ 12+2m+n &= 0 & 12+m &= 0 \\ n &= -12 & m &= -12 \end{aligned}$$

- 2) $f(x)=x^2-mx+a$ fonksiyonu $(x+1)^2$ ile bölün-
 düğünde kalan x ise $m-a$ kaçtır?

$$\begin{aligned} f(x) &= x + (x+1)^2 \cdot k \\ g(x) &= x^2-mx-x+a & g(1) &= 0 & g'(1) &= 0 \\ g'(x) &= 2x-m-1 & 1+m+1+a &= 0 \\ g'(1) &= -2-m-1=0 & m &= -3 & m-a &= -3-1=-4 \end{aligned}$$

- 3) $f(x)=x^5+kx^3-2x^2+nx+k$ fonksiyonunun bir
 çarpanı $(x+1)^2$ ise (k, n) ikilisini bulunuz?

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 & f'(-1) &= 0 & f(x) &= 5x^4+3kx^2-4x+n \\ -1-k-2-n+k &= 0 & f'(-1) &= 5+3k-4+n=0 \\ n &= -3 & 6+3k &= 0 \\ & & k &= -2 \\ (k, n) &= (-2, -3) \end{aligned}$$

- 4) $(x-2).f(x)=mx^3-8$ ise $f(2)$ kaçtır?

$$x=2 \Rightarrow 0 = 8m-8 \Rightarrow m = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x)(x-2) &= 3mx^2 \\ x=2 &\Rightarrow f(2) = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12 \end{aligned}$$

- 5) $f(x)=(a-2)x^4+2x^3+(b+4)x^2+mx+n$ fonksiyonunun
 üç katlı kökü -1 ise a ile b arasında hangi
 bağıntı vardır?

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 & f'(-1) &= 0 & f''(-1) &= 0 \\ f'(x) &= 4(a-2)x^3+6x^2+2(b+4)x+m \\ f''(x) &= 12(a-2)x^2+12x+2(b+4) \\ f''(-1) &= 12a-24-12+2b+8=0 \\ 12a+2b &= 28 \\ 6a+b &= 14 \end{aligned}$$