

MAKSİMUM VE MİNİMUM PROBLEMLERİ :

Minimum ve Maksimum Problemlerini Çözmek İçin Genel Strateji

Adım 1. Problemin ne istediği, problemde ne verildiği belirlenir.

Adım 2. Probleme uygun model belirlenir : gerekirse şekiller çizilir. Minimum veya maksimum yapılması istenen niceliği temsil edecek değişken seçilir ve ekstremum değeri istenen fonksiyon yazılır

Adım 3. Adım 2 de bulunan fonksiyonun tanım kümesi bulunur.

Adım 4. Kritik noktalar bulunur

Adım 5. Model çözülür

Adım 6. Çözüm yorumlanır

Örnek...1 :

Toplamları 20 olan iki sayının çarpımı en çok kaçtır?

$$x+y=20 \quad (x,y)_{\max}=?$$

$$f(x)=x \cdot (20-x) = x^2 + 20x \quad f'(x) = -2x + 20$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ +1- \\ \hline \end{array}$$

$$f(10) = 10 \cdot 10 = 100$$

Örnek...2 :

$x+y=20$ ise $x^2 \cdot y$ en çok kaç eder?

$$y=20-x$$

$$x^2 \cdot (20-x)$$

$$f(x) = 20x^2 - x^3 \quad f'(x) = 40x - 3x^2$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 40/3 \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$f\left(\frac{40}{3}\right) = 20 \cdot \frac{40^2}{9} - \left(\frac{40}{3}\right)^3 = \frac{32000}{27}$$

Örnek...3 :

$x^2+(m-2)x+m^2-3m+1=0$ denkleminin kökleri çarpımı en küçük olduğunda kökler toplamı ne olur?

$$f(m) = m^2 - 3m + 1 \Rightarrow f'(m) = 2m - 3$$

$$\begin{array}{r} 3/2 \\ -1+ \\ \hline \end{array}$$

$$m = 3/2$$

$$x_1 + x_2 = -m + 2$$

$$= -\frac{3}{2} + 2 = +\frac{1}{2}$$

Örnek...4 :

$x^2-(2+m)x+4-m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir $x_1^2+x_2^2$ en az kaç olabilir?

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$= (m+2)^2 - 2(4-m)$$

$$= m^2 + 4m + 4 - 8 + 2m$$

$$f(m) = m^2 + 6m - 4$$

$$f'(m) = 2m + 6$$

$$\begin{array}{r} -3 \\ -1+ \\ \hline \end{array}$$

$$f(-3) = 9 - 18 - 4 = -13/4$$

Örnek...5 :

$f(x) = x^3 - 16x^2 + 5x + 3$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun hangi noktadaki teğetinin eğimi en küçüktür?

$$f'(x) = 3x^2 - 32x + 5 \rightarrow \text{min değer üter}$$

$$f''(x) = 6x - 32$$

$$\begin{array}{r} 32/6 \\ -1+ \\ \hline \end{array}$$

$$x = 16/3 \text{ apslı nokta}$$

TÜREV UYGULAMALARI

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...6:

$f(x) = x^2 + 5x + 3$ parabolü üzerinde bir noktanın koordinatları toplamı en çok kaç olur?

$$\begin{aligned} (x, x^2 + 5x + 3) &\Rightarrow g(x) = x^2 + 6x + 3 \quad \text{en az} \\ g'(x) &= 2x + 6 \\ &\quad \quad \quad -3 \\ &\quad \quad \quad \rightarrow \quad + \\ g'(-3) &= 9 - 18 + 3 = -6 \end{aligned}$$

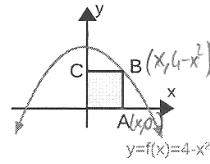
Örnek...7:

$y = \frac{12}{x}$ eğrisi üzerinde orijine en yakın noktayı bulunuz.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2} \\ d'(x) &= 2x + 2 \cdot \frac{12}{x} \cdot \left(-\frac{12}{x^2}\right) \\ x &= 2\sqrt{6} \\ d &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

Örnek...8:

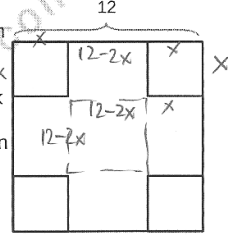
Şekilde bir köşesi orijin bir köşesi $y = 4 - x^2$ ve iki kenarı eksenler üzerinde olan OABC dikdörtgenlerden alanı en büyük olanı kaç br^2 dir?



$$\begin{aligned} A(OABC) &= x \cdot (4 - x^2) = 4x - x^3 \\ A'(x) &= 4 - 3x^2 \\ &\quad \quad \quad -2/3 \quad 2/3 \\ &\quad \quad \quad \rightarrow \quad + \quad - \\ A_{\max} &= A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Örnek...9:

Bir kenar uzunluğu 12 birim olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden eş x karesel bölgeler çıkarılarak atılıp üstü açık bir kutu yapılıyor. Kutunun hacmi en çok kaç br^3 olur?

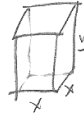


$$\begin{aligned} V &= (12-2x)^2 \cdot x \\ V'(x) &= 2(12-2x) \cdot (-2) \cdot x + (12-2x)^2 \\ V' &= (12-2x) [-4x + 12-2x] \\ &\quad \quad \quad (12-2x) \cdot (-6x+12) \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{r} 2 \quad 6 \\ + \quad - \\ \hline \end{array} \\ V(2) &= (12-4) \cdot 2 = 128 \text{ br}^3 \end{aligned}$$

Örnek...10:

Tüm ayrıtlarının toplamı 60 olan kare dik prizmanın hacmi en çok kaç cm^3 küptür?

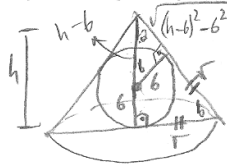
$$\begin{aligned} 8x + 4y &= 60 \\ 2x + y &= 15 \quad y = 15 - 2x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= x^2 \cdot y = x^2(15-2x) \\ V'(x) &= 2x(15-2x) + x^2(-2) \\ &= x(30-4x-2x) \\ x &= 5 \\ V(5) &= 25 \cdot 5 = 125 \end{aligned}$$

Örnek...11:

Yarıçapı 6 birim olan bir küreyi içine alabilecek maksimum hacimli bir koninin yüksekliği en çok kaç birim olur?



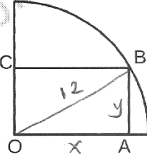
$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ \frac{6}{r} &= \frac{\sqrt{h^2 - 12h}}{h} \\ r &= \frac{6h}{\sqrt{h^2 - 12h}} \\ V &= \pi \cdot \frac{36h^2}{h^2 - 12h} \cdot h \\ V'(h) &= \frac{h^2 - 24h}{(h-12)^2} \\ &\quad \quad \quad \begin{array}{r} 0 \quad 12 \quad 24 \\ + \quad - \quad + \\ \hline \end{array} \quad h = 24 \end{aligned}$$

TÜREV UYGULAMALARI

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

Örnek...12 :

şekilde O merkezli çeyrek dairenin çapı 24 birimse şekildeki gibi oluşturulabilecek dikdörtgenlerden alanı en çok olanın çevresi kaç birimdir?



$$x^2 + y^2 = 144 \quad A = x \cdot y = x \cdot \sqrt{144 - x^2}$$

$$A'(x) = \sqrt{144 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{144 - x^2}}$$

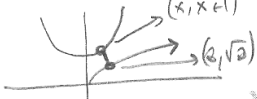
$$\frac{\sqrt{144 - x^2} - x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$$x = y = 6\sqrt{2}$$

$$C_1(OABC) = 24\sqrt{2}$$

Örnek...13 :

$f(x) = x^2 + 1$ ile $g(x) = \sqrt{x}$ arası en kısa mesafe kaç birimdir?



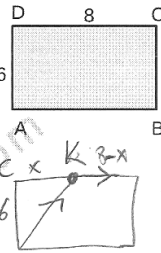
$$d(x, a) = \sqrt{(x - a)^2 + (x^2 + 1 - \sqrt{a})^2}$$

$$d(x) = \sqrt{\left(x - \frac{1}{16x^2}\right)^2 + \left(x^2 + 1 - \frac{1}{4x}\right)^2}$$

$$d'(x) = 0 \rightarrow x = ?$$

Örnek...14 :

Şekildeki dikdörtgen biçimli nehirdeki hızı saatte 2 km/s ve karadaki hızı 3 km/s olan bir hareketlinin en kısa sürede A noktasından C noktasına varması için takip etmesi gereken yol ne olmalıdır?



$$t = \frac{\sqrt{36 + x^2}}{2} + \frac{8 - x}{3}$$

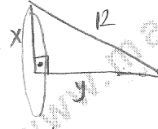
$$t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{3} = \frac{x}{2\sqrt{36 + x^2}} - \frac{1}{3}$$

$$t'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

D noktasından $\frac{12}{\sqrt{5}}$ birim C ye doğru K noktasında karaya çıkmalı

Örnek...15 :

Hipotenüsü 12 br olan bir dik üçgen dik kenarları biri etrafında döndürüldüğünde elde edilecek katı cismin hacmi en çok olduğunda alanı ne olur?



$$x^2 + y^2 = 144$$

$$A = \frac{\pi x^2 \cdot y}{3} = \frac{\pi (144 - y^2) \cdot y}{3}$$

$$A(y) = \frac{\pi}{3} (-2y) \cdot y + 144y^2$$

$$= \frac{\pi}{3} (144 - 3y^2)$$

$$y = 4\sqrt{3} \quad x = 4\sqrt{6}$$

$$A = \pi x^2 + \pi \cdot x \cdot 12 = 96\pi + 48\sqrt{6}\pi$$

DEĞERLENDİRME

- 1) Çevresi 10 cm olan dikdörtgen alanının alabileceği maksimum değerini bulunuz.



$$x + y = 5$$

$$x \cdot y = x \cdot (5 - x) = 5x - x^2$$

$$A'(x) = 5 - 2x$$

$$\frac{5}{2}$$

$$x = y = \frac{5}{2} \Rightarrow A = \frac{25}{4}$$

- 2) Kenarları $x+3$ ile $8-2x$ olan dikdörtgenin alanı maksimum kaç birim karedir?

$$A(x) = (x+3)(8-2x) = 8x - 2x^2 + 24 - 6x$$

$$-2x^2 + 2x + 24$$

$$A'(x) = -4x + 2$$

$$\frac{1}{2}$$

$$A_{\max} = \left(\frac{1}{2} + 3\right) \cdot \left(8 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2} \cdot 7 = \frac{49}{2}$$

TÜREV UYGULAMALARI

MAKSİMUM MİNİMUM PROBLEMLERİ

- 3) $x^2 + (16m - m^3)x + 1 = 0$ denkleminin kökler toplamının maksimum olması için m 'ne olmalıdır ($m < 0$)

$$x_1 + x_2 = m^3 - 16m = f(m)$$

$$f'(m) = 3m^2 - 16$$

$$m = -\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline & - & + \end{array}$$

- 4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x$ fonksiyonun grafiği üzerinde ordinat ve absis toplamı en büyük olan noktayı bulunuz. ($x < 0$)

$$(x, \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 7x)$$

$$x + y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$$

$$g'(x) = x^2 + x - 6$$

$$(x+3)(x-2)$$

$$\begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline & - & + \end{array}$$

$$(-3, \frac{33}{2})$$

- 5) Bir köşesi orijin diğer iki köşesi eksenler ve son köşesi de $y=4-2x$ üzerinde olan dikdörtgenlerden alanı maksimum olanının çevresi nedir?

$$A = x(4-2x)$$

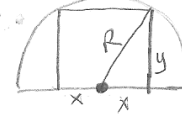
$$A = 4x - 2x^2$$

$$A'(x) = 4 - 4x$$

$$\begin{array}{c|c|c} + & - & + \\ \hline & - & + \end{array}$$

$$G = (1+2) \cdot 2 = 6$$

- 6) İki köşesi bir yarım çember üzerinde, diğer iki köşesi bu yarım çemberin çapı üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanın en büyük değeri yarıçap cinsinden en çok kaç birim kare olur?



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$A = 2xy = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$A'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} + \frac{2x \cdot (-2x)}{2\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = 2xy = 2 \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = R^2$$

- 7) Taban yarıçapı 4cm ve yüksekliği 8 cm olan bir koni içine yerleştirilebilecek maksimum hacimli silindirin yüksekliği kaç birimdir?



$$\frac{r}{4} = \frac{h}{8}$$

$$h = 2r$$

$$V = \pi r^2(8-h) = \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot (8-h) = \frac{\pi}{4} (8h^2 - h^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{4} (16h - 3h^2) = \frac{\pi}{4} \cdot h(16-3h)$$

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & 16/3 & \\ \hline - & + & - \\ \hline & + & - \end{array}$$

$$h = 16/3$$