

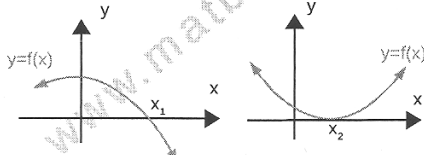
A) POLİNOM FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİNİN ÇİZİMLERİ

Polinom fonksiyonların grafikleri

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

şeklindeki bir polinom fonksiyonunun grafiğini çizerken aşağıdaki yollar izlenir:

1. $f(x)$ in tanım kümesi bulunur. Bu fonksiyonlar her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.
2. $f(x)$ in eksenleri kestiği noktalar bulunur.
 $x = 0$ için oy eksenini kestiği nokta,
 $y = 0$ için ox eksenini kestiği nokta bulunur. ($y = 0$ için bir x değeri bulunamıyorsa fonksiyonun Ox eksenini kesmediği anlaşılır)
3. Fonksiyonun gelişi ve gidiş yönüne bakılır.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ limiti hesaplanır, bulunan değerler eğrinin uç noktalarının hangi bölgede olduğunu gösterir.
4. $y = 0$ için çift katlı bir kökü varsa bu kökte grafik Ox eksenine teğet; $y = 0$ için tek katlı bir kökü varsa bu kökte grafik Ox eksenini keser
 Şekilleri inceleyiniz



x_1 tek katlı kök, $x_2 =$ çift katlı köktür.

5. $f(x)$ in türevine bakılır; yani fonksiyonun birin türevi alınıp sıfıra eşitlenir, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar belirlenir. Türevin kökleri varsa bulunur bulunan bu kökler fonksiyonda yerine yazılarak ekstremumlar elde edilir. Değişim tablosu yapılır.

6. Yukarıdaki tüm bilgileri tabloya aktarılır. Bu bilgilerin tamamı koordinat düzlemine aktarılarak grafik çizilmiş olur.

Örnek...1 :

Grafikleri çiziniz

1) $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$

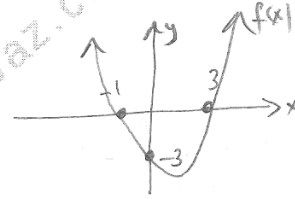
T.K: $\mathbb{R}$

x	0	3	-1
y	-3	0	0

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x - 2$

x	1
y'	-



2) $f(x) = x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$

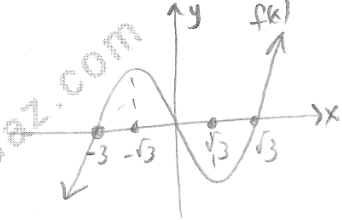
x	0	3	-3
y	0	0	0

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 9$

x	-3	0	3
y'	+	-	+



3) $f(x) = x^2(4 - x^2)$

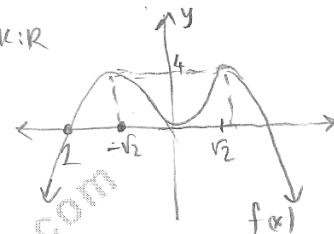
x	0	2	-2
y	0	0	0

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 2x(4 - x^2) - 2x \cdot x^2$
 $= 2x(4 - 2x^2)$

x	-2	0	2
y'	+	-	+



TÜREV UYGULAMALARI

GRAFİK ÇİZİMİ

B) GENEL GRAFİK ÇİZİMİ

$y=f(x)$ fonksiyonun grafiği aşağıdaki adımlar izlenerek çizilir.

Adım 1 Fonksiyonun tanım kümesi bulunur

Adım 2 Asimptotlar bulunur

Adım 3 Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur

Adım 4 Ekstremum noktaları bulunur

Adım 5 Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur

Adım 6 Çukurluğun yönü bulunur (gerekirse)

Adım 7 Grafik çizilir

Örnek...2 :

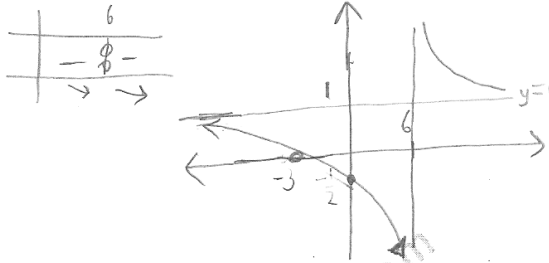
$f(x)=\frac{x+3}{x-6}$ fonksiyonun grafiğini çizin.

$TK: \mathbb{R} - \{6\}$ $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = -\infty$

$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -3 \\ \hline y & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}$

$f'(x) = \frac{x-6-x-3}{(x-6)^2} = \frac{-9}{(x-6)^2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ (yatay a.)
 $x=6$ Dikey a.



Örnek...3 :

$f(x)=\frac{x^2}{x^2-5x+6} = \frac{x^2}{(x-2)(x-3)}$ fonksiyonun grafiğini çizin.

$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \\ \hline y & 0 & \end{array}$

$x=2, x=3$ dikey a.

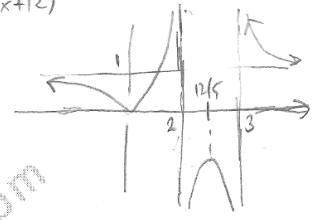
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{2x(x^2-5x+6) - (2x-5)x^2}{(x^2-5x+6)^2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ (yatay a.)

$y = \frac{-5x^2+12x}{(x^2-5x+6)^2} = x(-5x+12)$

$\begin{array}{c|c|c|c|c} y' & -\infty & 0 & 12/5 & +\infty \\ \hline & - & + & - & \end{array}$



Örnek...4 :

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ fonksiyonun grafiğini çizin.

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0$ T.K.: $\mathbb{R}$

$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & ? \\ \hline y & \sqrt{5} & 0 \end{array}$

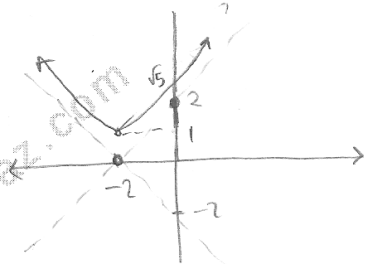
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+4x+5} = |x+2|$

$y = x+2$ $y = -x-2$ eğilim a.

$f'(x) = \frac{1(2x+4)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}$

$\begin{array}{c|c|c} y' & -2 & \\ \hline & - & + \end{array}$



TÜREV UYGULAMALARI

GRAFİK ÇİZİMİ

Örnek...5 :

$f(x)=\sqrt{x^2-16}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

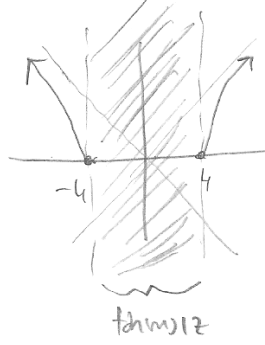
$$x^2-16 \geq 0 \quad \text{T.K } x > 4 \vee x < -4$$

x	0	4	-4
y	?	0	0

$$x \rightarrow \infty \sqrt{x^2-16} \sim |x|$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2-16}}$$

x	-4	0	4
y'	-	?	+



DEĞERLENDİRME

1) $f(x)=\frac{x}{x^2-9}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$\text{T.K } 16 - \{ -3, 3 \}$$

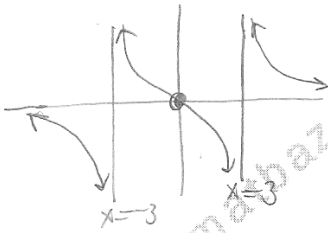
$$x \rightarrow 3^+, -3^- \quad y \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow 3^-, -3^+ \quad y \rightarrow -\infty$$

$$y=0 \text{ yatay asimptot}$$

x	0
y	0

$$f'(x) = \frac{x^2-9-2x \cdot x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2-9}{(x^2-9)^2} < 0 \searrow$$



2) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$$-(x^2-4x-5)$$

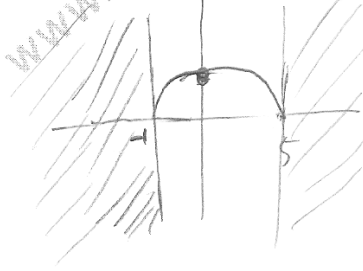
$$-(x+1)(x-5)$$

x	0	-1	5
y	5	0	0

$$\frac{-1}{-} \quad \frac{5}{-}$$

$$y' = \frac{1 \cdot (-2x+4)}{2 \cdot \sqrt{-x^2+4x+5}}$$

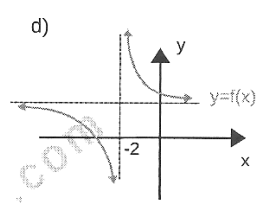
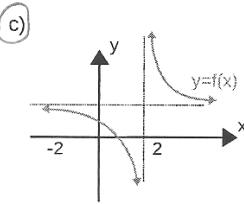
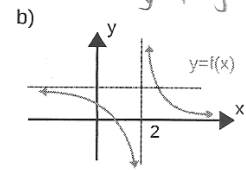
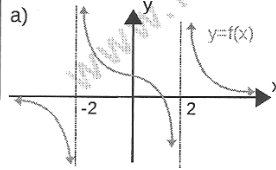
	2
+	-
↑	↓



3) $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ fonksiyonunun grafiği hangisi olabilir?

$$x=2 \text{ DA grafik 2 parça}$$

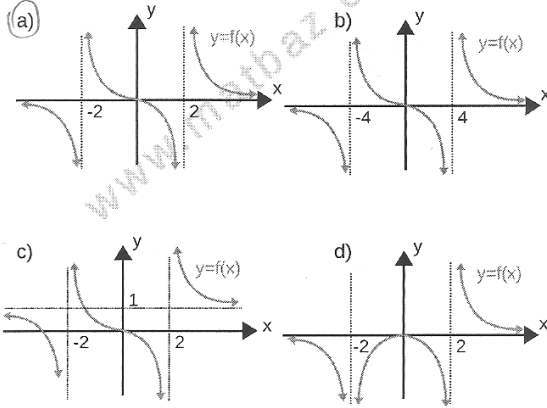
$$x=0 \quad y=1/2 \quad y=0 \quad x=1 \quad y=1 \text{ yatay a.}$$



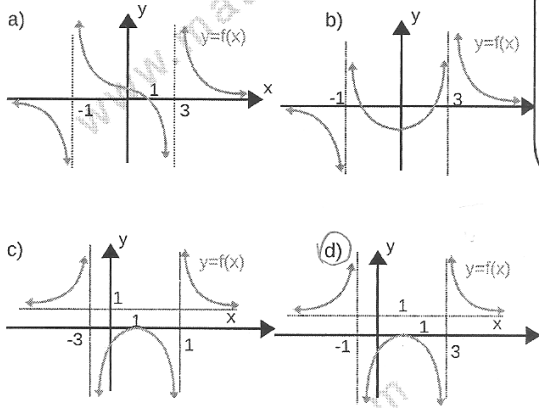
TÜREV UYGULAMALARI

GRAFİK ÇİZİMİ

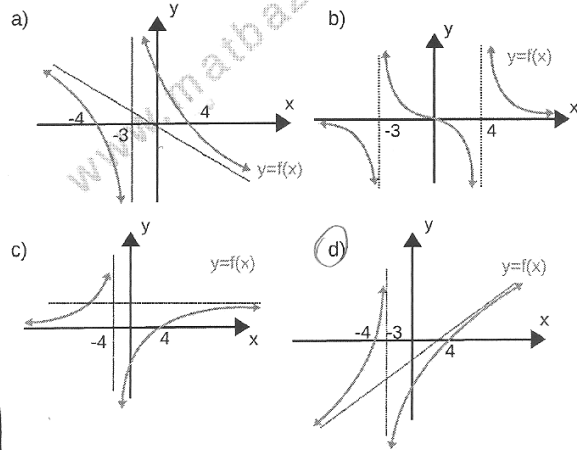
4) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ fonksiyonunun grafiği hangisidir?



5) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x - 3}$ fonksiyonunun grafiği hangisi gibi olabilir? $(x-3)(x+1)$ $x=1$ teget



6) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 3}$ fonksiyonunun grafiği hangisi gibi olabilir? $x = -3$ D.A. $y = x - 3$ teget



7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ fonksiyonunun grafiği hangisi gibi olabilir? $(x-4)(x+2)$ $y = x - 1$ E.A. $y = -x + 1$ E.A.

