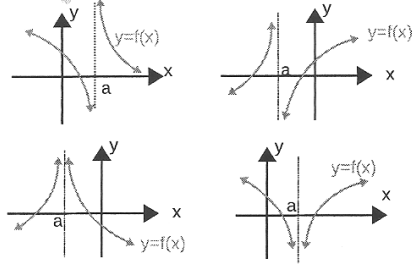


ASİMPTOTLAR

Asimptotlar fonksiyona sonsuzda teğet olan doğru veya eğrilerdir. Asimptotlar genelde kesirli ve köklü fonksiyonlarda vardır.

1. Düşey asimptot

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$
eşitliklerinden biri sağlanıyorsa $x=a$ doğrusu $f(x)$ fonksiyonun bir düşey asimptotudur.



Uyarı 1

Düşey asimptotlar genelde rasyonel fonksiyonlarda paydanın kökünde karşımıza çıkar (logaritma fonksiyonun da düşey asimptotları gibi fonksiyonları hariç tutuyoruz) fakat $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçiminde bir fonksiyon için $Q(a)=0$ olması $x=a$ nin düşey asimptot olması için tek başına yeterli değildir. Bu noktada limitlerin en az biri $\pm\infty$ olmalıdır.

Örnek...1:

Eğrilerin düşey asimptotlarını bulunuz.

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ $x-2=0$, $x=2$ Düşey Asimptot D.A.

Not $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ olduğunu görüyoruz.

2) $f(x) = \frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4}$ $x^2-4=0$ $x=2$ (?) $x=-2$ ✓

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{0}{0}$ $\frac{3x^2-4x+1}{2x} = \frac{12-8+1}{4} \neq \infty$
 $x=-2$ D.A. (SADECE)

3) $f(x) = \ln(x-2)$ $x-2=0$ $x=2$ D.A.

4) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+9}$ $x^2+9 \neq 0$ D.A yok!

Yatay ve Eğik Asimptotlar :

$y=f(x)$ fonksiyonu verildiğinde
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-g(x)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-g(x)] = 0$ olacak şekilde bir $g(x)$ polinom fonksiyonu varsa bu polinoma derecesine göre yatay, eğik veya eğri asimptot denir.

2. Yatay Asimptot

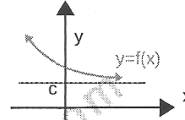
$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)-c] = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)-c] = 0$ olacak şekilde sabit bir $g(x)=c$ polinomu varsa bu fonksiyona f fonksiyonun yatay asimptotu denir.

Başka bir deyişle $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ veya

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ ise $y=c$ doğrusuna $y=f(x)$ in yatay asimptotu denir.

Şekilde $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

olduğundan,
 $y=c$ yatay asimptottur



Not $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda

(P ve Q birer polinom) durumları inceleyelim

1. $\text{der}P = \text{der}Q$ ise başkatsayı oranı yatay asimptottur.
2. $\text{der}P < \text{der}Q$ ise $y=0$ yatay asimptottur
3. $\text{der}P > \text{der}Q$ ise yatay asimptot yoktur. Eğri veya eğik asimptot vardır

Örnek...2:

Eğrilerin yatay asimptotlarını varsa bulunuz.

1) $f(x) = \frac{7}{x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$ $y=0$ y.A

2) $f(x) = \frac{2x^2+73x+4}{x^2-x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ $y=2$ y.A
der. e. kat. or. nı

3) $f(x) = \frac{5x^3-3x^5}{x^2-x^5+\sqrt{2}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ $y=3$ y.A

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

4) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
yatağı asimptot yok

5) $f(x) = 53^x$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 $y = 0$ yatay a.

6) $f(x) = \log_2 \left(\frac{16x^2 + 3x}{2x + 5} \right)$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$
y.A. yok

7) $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} + x = \infty - \infty$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} + x = \frac{1}{2}$
 $y = \frac{1}{2}$ YA

8) $f(x) = x + \frac{3}{x}$
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$ YA yok

9) $f(x) = \frac{\pi x^2 + x + 1}{e^x}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $y = 0$ YA.

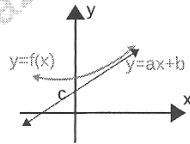
UYARI

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}$ ifadesinde $y = B(x)$ derecesine göre yatay, eğik veya eğri asimptotlardan biridir

3. Eğik Asimptot

$y = f(x)$ fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ olacak biçimde 1. dereceden bir g fonksiyonu bulunabiliyorsa bu fonksiyona eğik asimptot denir.

Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu $y = ax + b$ doğrusudur



Örnek...3 :

Fonksiyonların eğik asimptotunu bulunuz

1) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$ $y = x$ eğik a.s.m.

2) $f(x) = \frac{3x^2 + 6x + 2}{x - 1}$ $y = 3x + 9$ eğik asimptot

3) $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$ $y = x^2 + x + 1$ Eğik Asimptot

NOT

$a > 0$ için $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ fonksiyonunun eğik asimptotları $y = \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ olmaktadır.

Örnek...4 :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 4}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (x + 4) = x + 4$ $y = x + 4$ ve $y = -x - 4$ eğik asimptotlar
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -(x + 4) = -x - 4$

Örnek...5 :

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$ fonksiyonunun eğik asimptotlarını bulunuz

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x + \frac{5}{2}$ $y = x + \frac{5}{2}$ ve $y = -x - \frac{5}{2}$ eğik asimptotlar
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x - \frac{5}{2}$

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

Örnek...6 :

$f(x)=2x-3+\sqrt{x^2+2x}$ fonksiyonunun eğik asimptotları hangi noktada kesişir?

$$x \rightarrow \infty \quad y = 2x - 3 + \sqrt{x^2 + 2x} \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$x \rightarrow -\infty \quad y = 2x - 3 + \sqrt{x^2 + 2x} = x - 4$$

$$\begin{aligned} y &= x - 4 \\ y &= 3x - 2 \\ 3x - 2 &= x - 4 \rightarrow 2x = -2 \\ x &= -1 \\ y &= -1 - 4 = -5 \end{aligned}$$

4. Eğri Asimptot

Eğer $y=f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ ve } \text{der}[g(x)] > 1$$

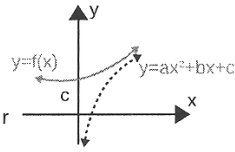
oluyorsa $g(x)$ e eğri asimptot denir.

Şekilde $y=f(x)$

fonksiyonunun eğik

asimptotu

$y=ax^2+bx+c$ eğrisidir



Örnek...7 :

$f(x)=\frac{x^3+1}{x}$ eğrisinin eğri asimptotunu bulunuz.

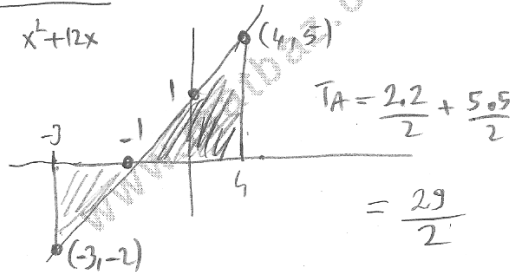
$$\begin{array}{r} x^3+1 \\ x \overline{) } \\ x^3 \\ \hline 0 \end{array} \quad y=x^2 \text{ eğri asp.}$$

Örnek...8 :

$f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-12}$ fonksiyonunun asimptotları ve x eksenine sınırlandırılmış bölgelerin alanı kaç birim karedir?

$$(x-4)(x+3)=0 \quad \begin{aligned} x &= 4 \text{ D.A.} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ x^2-x-12 \overline{) } \\ x^3-x^2-12x \\ \hline x^2-x-12 \end{array} \quad y=x+1 \text{ eğik a.}$$



Örnek...9 :

$f(x)=\frac{nx^2+(2+n)x+3}{x}$ fonksiyonunun asimptotlarından biri $y=3x+m$ ise m-n kaçtır?

$$\begin{array}{r} nx^2 + (2+n)x + 3 \\ nx^2 \overline{) } \\ \hline (2+n)x + 3 \\ (n+2)x \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{aligned} nx + (n+2) &= 3x + m \\ n &= 3 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

Örnek...10 :

$f(x)=\frac{5x^2}{nx^2-3x+2}$ fonksiyonun sadece yatay asimptotu var ise n nasıl seçilmelidir?

$$n \cdot x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (\Delta < 0)$$

$$9 - 4n \cdot 2 < 0 \quad n > 9/8$$

Not $x=0$ nx^2-3x+2 nin bir kökü olmaz

Örnek...11 :

$f(x)=y$ fonksiyonunu için $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 5x] = e$ ise bu fonksiyonun hangi tür asimptotu kesinlikle vardır?

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (5x + e)) = 0$$

$x \rightarrow \infty$ için denedik $f(x) \sim 5x + e$

$\Rightarrow y = 5x + e$ eğik asimptottur.

Örnek...12 :

$f(x)=\frac{mx-2}{x-n}$ fonksiyonu $A(3,-2)$ ye göre simetrikse (m,n) kaçtır?

bunb simetri eksen asimptotları kesimidir.

$$x=n \text{ D.A.} \quad y=m \text{ Y.A.}$$

$$(n,m) = (3,-2)$$

$$(m,n) = (-2,3)$$

TÜREV UYGULAMALARI

ASİMPTOTLAR

DEĞERLENDİRME

- 1) Düşey, yatay eğik veya eğri asimtotlarını bulunuz

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-3}$

D.A: $x=3$

Y.A: $y=1$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+3)(x-2)}$

D.A: $x=-3$

$x=2$

Y.A: $y=1$

c) $f(x) = \frac{x+2|x|}{3x-6}$

D.A: $x=2$

Y.A: $y=1$ ve $y=-\frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$

d) $f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sin x = 0$

$x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

düşey asimptotlar

Y.A: yok

e) $f(x) = \frac{x}{2+\sin x}$

$2+\sin x \neq 0$

D.A yok

Y.A yok

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$

f) $f(x) = \log(x^2-16)$

$x^2-16=0$

$x = \pm 4$ D.A

Y.A yok

g) $f(x) = 7^{-x}$

D.A yok

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$y=0$ yatay a.

h) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}-2x$

D.A yok

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = |x-2|-2x = -x+2 > \text{eğik a.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = |\bar{x}-2|-2x = -3x+2 > \text{eğik a.}$

i) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2+5x+4}{x^2-1}$

$x=1$ $x=-1$ DA OLABİLİR

$x=1 \Rightarrow \frac{-2+3-5+4}{0} = \frac{0}{0}$

L'Hopitalle limit
teo kullanılır.

$x=1$ D.A

$\frac{2x^3+3x^2+5x+4}{2x^2-2x} = \frac{x^2-1}{2x+3}$

$y=2x+3$
eğik a.

j) $f(x) = \sqrt{x^2+5x}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = x + \frac{5}{2} > \text{eğik a.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -x - \frac{5}{2}$

k) $f(x) = 3x + 2\sqrt{x^2+3x}$

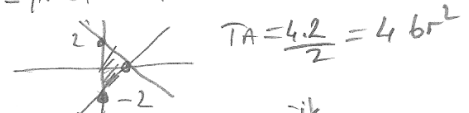
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3x + 2 \cdot |x + \frac{3}{2}| = 5x + 3 > \text{eğik a.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3x + 2 \cdot |x + \frac{3}{2}| = x - 3$

- 2) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ fonksiyonunun asimptotları ve y eksenine sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = |x-2| = x-2 > \text{eğik a.}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = |x-2| = -x+2$



- 3) $f(x) = \frac{(n-3)x^2 + (n+1)x + 3}{x+2}$ fonksiyonun eğri asimptotu yoksa eğik asimptotu nedir?

deneceler aynı sonucu verir (n=3)

başlatmayı oradan $y=4$ yatay a.

- 4) $f(x) = \frac{mx^2-2}{x-n}$ fonksiyonu A(4,1) ye göre simetrikse (m,n) kaçtır?

Asimptot kesimi (4,1) yerine yaz.

$x=n$ DA ($x=4$)

$\frac{mx^2-2}{x-n} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

$\frac{mx^2-2}{x-4} = \frac{mx^2-2}{x-4}$

