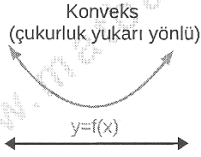
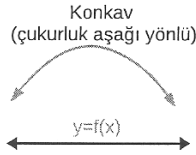


TÜREV VE ÇUKURLUĞUN YÖNÜ

(a,b) aralığında f fonksiyonuna çizilen teğetlerin üst kısmında kalıyorsa konvektir ($y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çukurluğunun yönü yukarı doğru) denir.

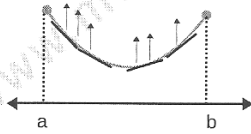


(a,b) aralığında f fonksiyonuna çizilen teğetlerin alt kısmında kalıyorsa konkavdır ($y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği çukurluğunun yönü aşağı doğru) denir

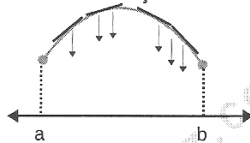


UYARI

İki kez türevlenebilir bir $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği y' artan ise konvektir y' artan olması için $y''>0$ olması gerektiği sonucunu çıkarırız.



y' (başka bir deyişle teğetin eğimi) azalan ise konkavdır. y' azalan olması için $y''<0$ olması gerektiği sonucunu çıkarırız.

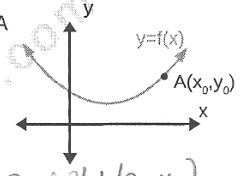


ÖZET OLARAK

Bir fonksiyonun çukurluğunun yönünü belirleme için verilen fonksiyonun ikinci türevinin işaretini inceleriz. İkinci türev pozitifse grafik o bölgede konveks, negatifse konkavdır.

Örnek...1 :

$y=f(x)$ fonksiyonu ve üzerinde bir A noktası veriliyor. Hangileri doğrudur?

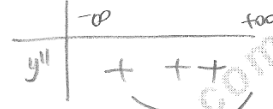


- 1) $f'(x_0)>0$ ✓
Çizilen teğet eğimi >0
(veya fonksiyonun artan olduğu aralıkta x_0)
- 2) $f''(x_0)<0$ ✓
 x_0 içeren aralıkta çukurluk yukarı yönlü
- 3) $f'(x_0)<0$ X (HATALI)

Örnek...2 :

$y=3x^2-6x$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü aralıklara göre belirleyiniz.

$$y' = 6x - 6 \quad y'' = 6$$

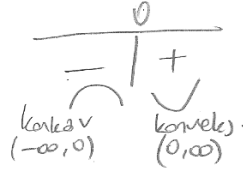


$(-\infty, \infty)$ için $f(x)$ konveks, dübükey

Örnek...3 :

$y=x^3$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü aralıklara göre belirleyiniz.

$$y' = 3x^2 \quad y'' = 6x$$

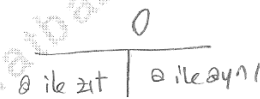


Örnek...4 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=ax^2+bx+c$ fonksiyonunun çukurluğunun yönünü katsayılarla göre genelleyiniz

$$y' = 2ax + b$$

$$y'' = 2a$$



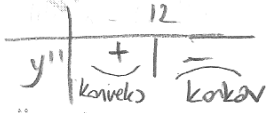
Örnek...5 :

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=\frac{x+4}{12-x}$ fonksiyonunun
konkav ve konveks olduğu aralıkları
belirleyiniz.

$$f(x) = \frac{x+4}{12-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(12-x) - (-1)(x+4)}{(12-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16 \cdot (12-x)^{-2}}{(12-x)^2}$$

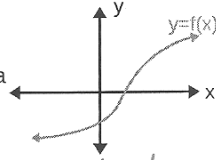
$$f''(x) = -32(12-x)^{-3} \cdot (-1) = \frac{32}{(12-x)^3}$$



Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun
grafiki veriliyor.

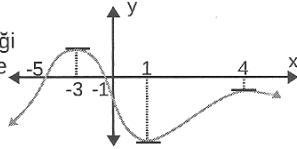
$f(0), f'(0), f''(0)$ sayılarında
n hangileri pozitifdir?



$f(0) < 0$ grafik eksenin altında
 $f'(0) > 0$ $x=0$ da çizilen teğet doğruyu
yapar
 $f''(0) > 0$ Gukurluk ($m > 0$)
 $x=0$ 'ı içine bir eğilimde yukarı

Örnek...7 :

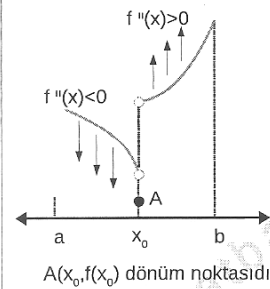
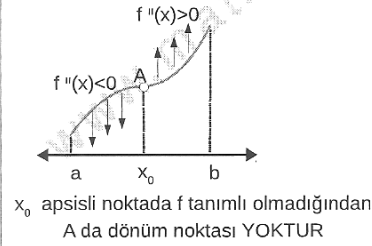
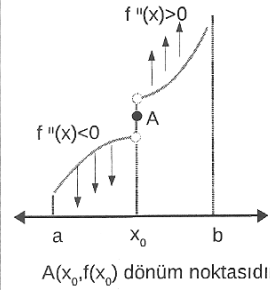
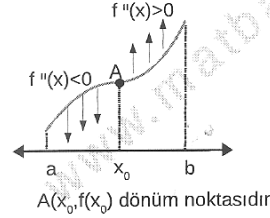
$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiki
şekildeki gibidir. Buna göre
hangileri doğrudur?



- 1) $f(-3)=0$ (X)
- 2) $f'(-2)>0$ (X) azalıyor / teğet eğim doğruyu
- 3) $f''(5)<0$ ✓ Gukurluk azalıyor
- 4) $f'(1) \cdot f''(-1) > 0 \rightarrow 0 \cdot ? > 0$ (X)
- 5) $f''(4)<0$ ✓ Gukurluk azalıyor yavaş
- 6) $f'(-2) \cdot f''(-2) < 0 \rightarrow - \cdot - = +$ (X)
teğet eğim doğruyu
gukurluk azalıyor yavaş

DÖNÜM NOKTASI

Bir fonksiyonun konvekslikten
konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe
geçtiği ve fonksiyonun tanımlı olduğu
nokta dönüm (büküm) noktası denir.



TÜREV UYGULAMALARI -4

KONKAV-KONVEKS

TEOREM

f fonksiyonunun x_0 noktasında birinci ve ikinci türevi olsun. x_0 noktası f fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi ise $f''(x_0)=0$ dır.

UYARI: f fonksiyonu için $f''(x_0)=0$ ise bu noktada dönüm noktası vardır diyemeyiz. $f''(x_0)=0$ koşuluna ek olarak ikinci türevin bu noktada işaret değiştirmesi de gerekir.

f fonksiyonu x_0 da türevi yok ise (hatta sürekli olmasa da) dönüm noktası olabilir. (yukarıdaki şekilleri inceleyiniz)

UYARI

Üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonda, dönüm noktası fonksiyonu simetri merkezidir.

Örnek...8 :

$f(x)=x^3$ fonksiyonun dönüm noktasını bulunuz.

$$f'(x)=3x^2 \quad f''(x)=6x$$

x	0
f''	- +

(0,0) dönüm noktasıdır.

Örnek...9 :

$f(x)=x^4$ fonksiyonun dönüm noktası var ise bulunuz.

$$f'(x)=4x^3 \quad f''(x)=12x^2$$

x	0
f''	+ +

dönüm noktası yoktur.

Örnek...10 :

$f(x)=4x^6-12x^5+ax^3$ fonksiyonun dönüm noktası (1,f(1)) ise a'yı bulunuz.

$$f''(1)=0 \text{ alınır}$$

$$f'(x)=24x^5-60x^4+3ax^2$$

$$f''(x)=120x^4-240x^3+6ax$$

$$f''(1)=120-240+6a=0$$

$$6a=120$$

$$a=20$$

Örnek...11 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, y=f(x)=2x^3-ax^2+bx+3$ fonksiyonun $x=-1$ de maksimum $x=2$ de minimumu varsa dönüm noktasının apsisi nedir?

$$f'(-1)=0, f'(2)=0$$

$$6+6+b=0$$

$$b=-12$$

$$f'(x)=6x^2-2ax+b$$

$$f'(-1)=6+2a+b=0$$

$$f'(2)=24-4a+b=0$$

$$-18+6a=0 \rightarrow a=3$$

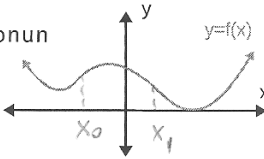
$$f''(x)=12x-6=0$$

$$x=1/2$$

dönüm noktası apsisi dir.

Örnek...12 :

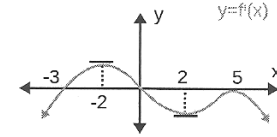
Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun kaç tane dönüm noktası vardır?



x_0 ve x_1 dönüm noktası apsisi dir.

Örnek...13 :

Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonun türevinin grafiği verilmiştir. $y=f(x)$ fonksiyonun dönüm noktası apsilerinin çarpımı kaçtır?



$$f''(x)=0 \text{ kökleri } -2, 2 \text{ ve } 5 \text{ dir.}$$

$$\text{Böylelikle } \prod x_i = -2 \cdot 2 \cdot 5 = -20$$

Örnek...14 :

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}, y=f(x)=mx^3-nx^2+7x+m$ dönüm noktası x eksenindeyse bu noktanın m ve n türünden ifadesi nedir?

$$f'(x)=3mx^2-2nx+7$$

$$f''(x)=6mx-2n$$

apsis: $x=2n/6m=n/3m$

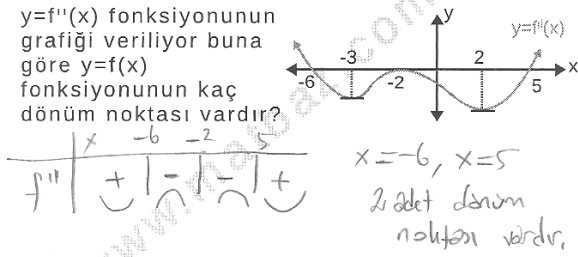
Dönüm noktası $(\frac{n}{3m}, 0)$

TÜREV UYGULAMALARI -4

KONKAV-KONVEKS

Örnek...15 :

$y=f''(x)$ fonksiyonunun grafiği veriliyor buna göre $y=f(x)$ fonksiyonunun kaç dönüm noktası vardır?



Örnek...16 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^3-bx^2+6x+a$ fonksiyonunun simetri merkezi $A(1,2)$ ise $a+b$ kaçtır?

simetri merkezi = dönüm noktası (3° pol)
 $f'(x) = 3x^2 - 2bx + 6$ $f'(1) = 2$
 $f''(x) = 6x - 2b$ $f''(1) = 0$
 $f''(1) = 6 - 2b = 0 \rightarrow b = 3$ $f(1) = 1 - 3 + 6 + a = 2$

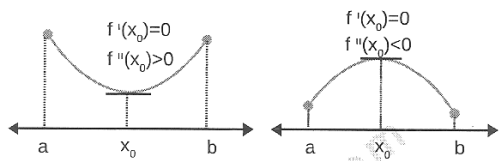
Örnek...17 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x \cdot |x|$ fonksiyonunun dönüm noktası var mıdır?

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$
 (0,0) dönüm noktasıdır.

EKSTREMUM NOKTALARI VE İKİNCİ TÜREV

(a,b) aralığında iki kere türevlenebilir f fonksiyonunun x_1 ve x_2 apsisli iki ekstremum noktası var ve $f''(x_1) < 0$ ise x_1 yerel maksimum, $f''(x_2) > 0$ ise x_2 yerel minimum alır. Şekilleri inceleyiniz.



Örnek...18 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

$f'(x) = x^2 + x - 2$ $f''(x) = 2x + 1$
 $(x+2)(x-1)$
 $x=1$ $f''(1) = 3 > 0$ yerel min
 $x=-2$ $f''(-2) = -3 < 0$ yerel max
 $(1, y_0)$ yerel min $(-2, y_1)$ yerel max

DEĞERLENDİRME

- 1) $y=3x^3+5x^2+7x-3^8$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları belirleyiniz.

$f'(x) = 9x^2 + 10x + 7$
 $f''(x) = 18x + 10$
 $f''(x) = 0 \rightarrow x = -5/9$
 $x < -5/9$ konkav
 $x > -5/9$ konveks

- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=e^{x^2-x}$ fonksiyonunun konkav ve konveks olduğu aralıkları belirleyiniz.

$y' = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$
 $y'' = e^{x^2-x} (2x-1)(2x-1) + 2e^{x^2-x}$
 $y'' = e^{x^2-x} [(2x-1)^2 + 2] > 0$ daima konveks.

- 3) $f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}, y=f(x)=\frac{x}{x-2}$

fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralığı belirleyiniz.

$f'(x) = \frac{x-2-x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2} = -2(x-2)^{-2}$
 $f''(x) = 4(x-2)^{-3} \cdot 1 = \frac{4}{(x-2)^3}$

y'' $x < 2$ $y'' < 0$ konkav
 $x > 2$ $y'' > 0$ konveks

- 4) $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=\sin x$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralığı belirleyiniz

$f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\sin x$
 $f''(x) = 0 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$
 $0 < x < \pi$ $f''(x) < 0$ konkav
 $\pi < x < 2\pi$ $f''(x) > 0$ konveks

- 5) $y=kx^3+6x^2+4x+9$ fonksiyonunun konkav olduğu en geniş aralık $(2, \infty)$ ise k aralıkları belirleyiniz

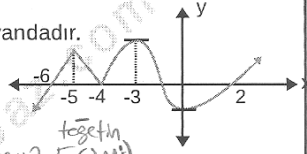
$y' = 3kx^2 + 12x + 4$ $f''(2) = 0$
 $y'' = 6kx + 12$
 $f''(2) = 12k + 12 = 0, k = -1$

TÜREV UYGULAMALARI -4

KONKAV-KONVEKS

6)

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandadır. Buna göre ifadelerin doğruluğunu yanlışlığını belirtiniz.



$$f'(6) > 0 \quad (\checkmark) \quad (\text{ARTAN}) \quad (\text{veya } E(6) \text{ M})$$

$$f'(-2) = 0 \quad (\times) \quad f'(-2) < 0$$

$$f''(0) < 0 \quad (\checkmark) \quad (\text{GUKURLUK YUKARI})$$

$$f'(-3) = 0 \quad (\checkmark) \quad m_t = 0$$

$$f'(2)f''(2) > 0 \quad (\checkmark) \rightarrow + \cdot + > 0 \quad \text{EĞİM, GUKURLUK}$$

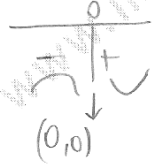
$$f''(-3) < 0 \quad (\checkmark) \quad \text{GUKURLUK}$$

$$f'(1)f''(1) < 0 \rightarrow + \cdot + > 0 \quad \text{EĞİM, GUKURLUK} \quad (\times)$$

7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=6x^3-3x+a-3$ fonksiyonun dönüm noktası x eksenindeyse a kaçtır?

$$f'(x) = 18x^2 - 3$$

$$f''(x) = 36x$$

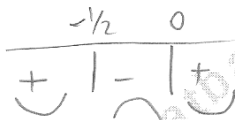


$$f(0) = a - 3 = 0 \\ a = 3$$

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^4+x^3$ fonksiyonunun dönüm noktalarının ordinatları arası mesafe kaç birimdir?

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x \\ 6x(2x+1)$$



$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right) \quad B(0, 0)$$

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{16}$$

9) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=ax^3+2x^2+bx+a$ fonksiyonunun simetri merkezi $A(-1,4)$ ise $\frac{b}{a}$ kaçtır? dönüm noktası $(-1,4)$

$$f'(x) = 3ax^2 + 4x + b \quad f'(-1) = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 4 \quad f(-1) = 4$$

$$-6a + 4 = 0$$

$$a = \frac{2}{3}$$

$$f(-1) = -\frac{2}{3} + 2 - b + \frac{2}{3} = 4$$

$$b = -2$$

$$\frac{b}{a} = -2 / \frac{2}{3} = -3$$

10) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^3-12x^2+4$ fonksiyonun dönüm noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz

$$f'(x) = 3x^2 - 24x$$

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$x=4$$

$$y = 4^3 - 192 + 4 \\ = -124$$

$$m_t = f'(4) = 48 - 96 \\ = -48$$

$$y - (-124) = -48(x - 4)$$

$$y = -48x + 68$$