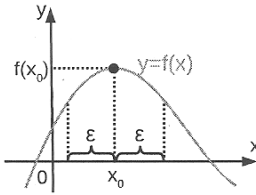


TÜREV VE YEREL EKSTREMUM NOKTALARI

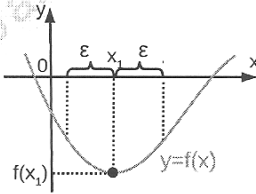
YEREL MAKSİMUM VE YEREL MİNİMUM:

$f: A \rightarrow B$, $y=f(x)$ sürekli fonksiyonu verilsin. $x_0 \in (a,b)$ olmak üzere f fonksiyonu $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ aralığında en büyük değerini x_0 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel maksimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.

Yandaki şekilde x_0 içine alan bir aralıkta $f(x_0)$ değerinden daha büyük bir görüntüye sahip değer bulunmadığından $f(x_0)$ değeri yerel maksimum ve x_0 noktası yerel maksimum noktasının apsisidir.

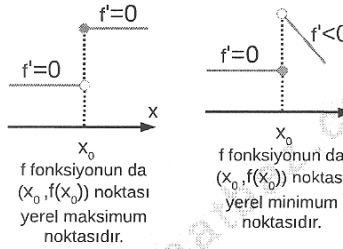
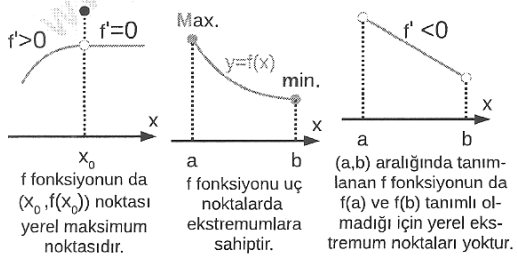
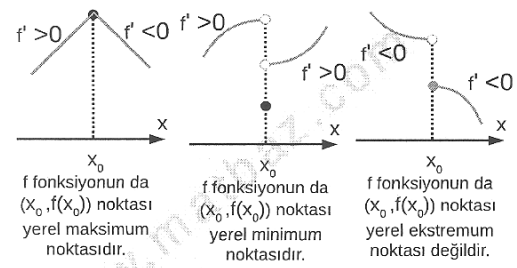
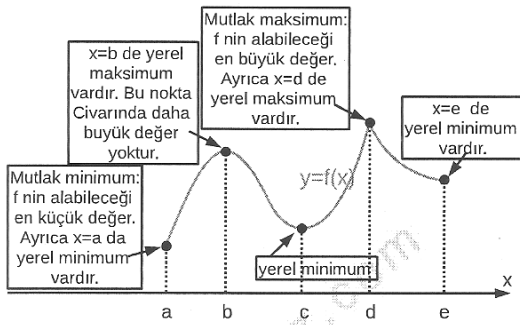


Benzer bir düşünceyle $x_1 \in (a,b)$ olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonu $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)$ aralığında en küçük değerini x_1 noktasında alıyorsa fonksiyonun bu noktada yerel minimumu vardır denir. Şekli inceleyiniz.



Yerel maksimum veya yerel minimuma kısaca yerel ekstremum denir.

Şekli inceleyiniz.



TEOREM 1 : SÜREKLİ FONKSİYONLAR İÇİN EKSTREMUM DEĞER TEOREMİ

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)$ sürekli bir fonksiyon ise f fonksiyonu A da maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

TEOREM 2

Eğer f fonksiyonu c gibi bir noktada ekstremum değerine sahip ve yine bu noktada türevlenebiliyorsa $f'(c)=0$ olur.

İSPAT

c noktası için fonksiyon maksimum değerini alsın $f'(c)=\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ve burada $x \rightarrow c^+$ iken $x-c > 0$, $f(x)-f(c) < 0$ olacağından $f'(c)=\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ ve $x \rightarrow c^-$ iken $x-c < 0$, $f(x)-f(c) < 0$

TÜREV UYGULAMALARI - 3

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

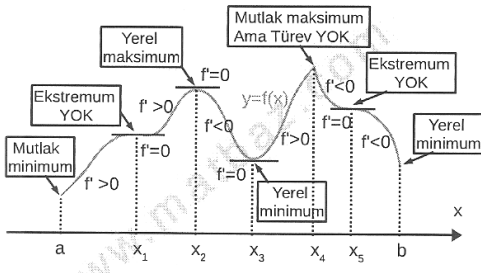
olacağından , $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ olur
bu eşitsizliklere göre $f'(c) = 0$ olmalıdır.

UYARI:

Bir fonksiyonun bir noktada türevinin 0 olması fonksiyonun o noktada ekstremuma sahip olmasını gerektirmez.

KRİTİK NOKTA

x_0 , f fonksiyonun tanım kümesinin bir elemanı ve $f'(x_0) = 0$ oluyorsa veya $f'(x_0)$ yoksa $x = x_0$ kritik nokta adını alır. Sınırlı bir aralıkta tanımlı noktalar için sınır değerleri de ekstremum için mutlaka araştırılmalıdır.
Genel olarak $y = f(x)$ fonksiyonu ekstremum değerlerini uç noktalarda veya kritik noktalarda alır.



Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$$

yerel max $(-1, 4)$, yerel min $(1, 0)$

Örnek...2 :

$f(x) = y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

$$y'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x$$

$$12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x-2)^2$$

$$f(0) = 0$$

$$(0, 0) \text{ yerel min}$$

$$\text{ekstremin yok}$$

Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = \frac{x}{3-4x}$ fonksiyonun ekstremum noktalarını bulunuz?

$$f'(x) = \frac{3-4x - (-4)x}{(3-4x)^2} = \frac{3}{(4x-3)^2}$$

$f' \mid \frac{3}{4} \rightarrow$ denemeden yerel ekstremum yok!

Örnek...4 :

$f(x) = y = x^5 + 4x^2 + ax - 3$ fonksiyonun $x=2$ de ekstremumu varsa a ne olmalıdır?

$$f'(2) = 0 \text{ olmalı (ekstreminde türev yok!)} \quad \text{değer: 0 olmalı}$$

$$f'(x) = 5x^4 + 8x + a$$

$$f'(2) = 80 + 16 + a = 0 \Rightarrow a = -96$$

Örnek...5 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ fonksiyonu $x=0$ da maksimum, $x=1$ de minimum değerine sahipse (m, n) ikilisini bulunuz?

$$f'(0) = 0 \quad f'(1) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$$

$$f'(0) = n = 0$$

$$f'(1) = 3 + 2m + n = 0 \Rightarrow m = -3/2$$

$$(m, n) = (-3/2, 0)$$

Örnek...6 :

$f: [3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = 3x^2 - 24$ fonksiyonunun maksimum değerini bulunuz?

$$f'(x) = 6x \quad f(0) = -24 \quad \text{G.K } [-24, 3]$$

$$f' \mid \frac{0}{3} \rightarrow \quad f(-3) = 3 \quad \text{nokta: } 3$$

$$f(2) = -12 \quad (-3, 3)$$

Örnek...7 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ veriliyor.
 $y = f'(x)$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz?

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 \quad \text{iteren bir fonksiyon minimumu}$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'' \mid \frac{1}{6} \rightarrow$$

$x=1$ de min değerini alır ve bir değer

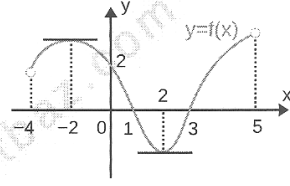
$$f'(1) = 3 - 6 + 6 = 3 \text{ tür}$$

TÜREV UYGULAMALARI - 3

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

Örnek...8 :

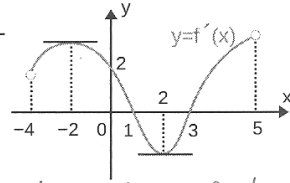
Grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerinin çarpımı kaçtır?



ekstremum apsileri -2 ve 2
çarpım -4

Örnek...9 :

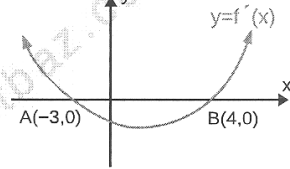
Grafik $y=f'(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre fonksiyonun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirtiniz?



ekstremum apsileri 1, 3 (türev işaret değiştiriyor
(işaret tablosu yapılabilir))

Örnek...10 :

Türevinin grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi nedir?



	-3	4	
f'	+	-	+
	↗ ↘ ↗		

yerel maks apsisi -3

Örnek...11 :

$y=f(x)=x^3-3x^2+n$ fonksiyonunun grafiği x eksenini 3 noktada kesiyorsa n'nin kaç farklı tamsayı değeri vardır?

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f(0) > 0 \Rightarrow n > 0$
 $f(2) < 0 \Rightarrow 8-12+n < 0 \Rightarrow n < 4$
 $n \in (0, 4)$ 3 değer

Örnek...12 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^3-3x^2+mx+n$ fonksiyonun tersi varsa en küçük m tamsayısı kaçtır?

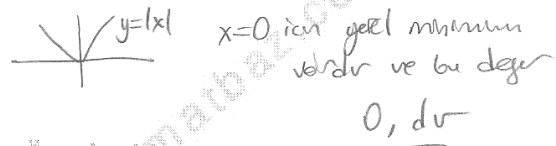
traj: olması için f-1 olması ~ daima artan shalı

$$f'(x)=3x^2-6x+m \Delta \leq 0$$

$$36-4 \cdot 3 \cdot m \leq 0 \Rightarrow m \geq 3$$

Örnek...13 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri nedir?



Örnek...14 :

$f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x|x^2-1|+2x$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve minimum değerleri nedir? Sınırlar ve kritik noktaların hepsine bak

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & x < -1, x > 1 \\ 3x-x^3 & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(-2)=-10, f(4)=68, f(-1)=-2, f(1)=2$$

$(x^3+x)'=3x^2+1$ artan (küçük)
 $(3x-x^3)'=3-3x^2 \rightarrow$ kritik ± 1 mutlak maks (2, 68)
mutlak min (-2, -10)

Örnek...15 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+1$ fonksiyonu ve

$y=k$ fonksiyonu hangi k değerleri için 3 farklı noktada kesişir?

$\max > k, \min < k$

$$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x^2+x-2)=3(x+2)(x-1)$$

$$f(-2) > k, f(1) < k$$

$$\begin{cases} -8+6+12+1 > k \\ k < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\frac{3}{2}-6+1 < k \\ \frac{5}{2} < k \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2} < k < 11$$

Örnek...16 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)=x^3+mx^2$ eğrisine $y=-3x+2$ doğrusuna paralel olacak şekilde sadece bir teğet çizilebiliyorsa m kaçtır?

$$3x^2+2mx=-3 \text{ tek köşüm shalı}$$

$$3x^2+2mx+3=0 \Delta=0$$

$$4m^2-4 \cdot 3 \cdot 3=0 \Rightarrow m^2-9=0 \Rightarrow m=3 \text{ or } m=-3$$

Örnek...17 :

$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=\sin 2x+2\cos x$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi nedir?

$$f'(x)=\cos 2x-2\sin x=0$$

$$\cos 2x-2\sin x=0 \Rightarrow 1-2\sin^2 x-2\sin x=0$$

$$2\sin^2 x+2\sin x-1=0$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6} \text{ or } x=\frac{5\pi}{6}$$

$$f(0)=2, f(\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{2}, f(2\pi)=2$$

$$f(\frac{5\pi}{6})=\frac{3\sqrt{3}}{2}, f(\frac{3\pi}{2})=0$$

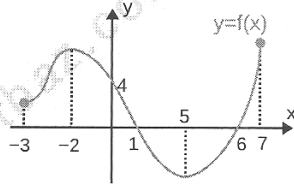
maks: $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ apsisi $\frac{\pi}{6}$

TÜREV UYGULAMALARI - 3

(TÜREVİN GEOMETRİK YORUMU, FİZİKSEL YORUMU, DEĞİŞİM HIZI VE DEĞERLENDİRMELER)

DEĞERLENDİRME

- 1) $y=f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsilerini belirleyiniz.

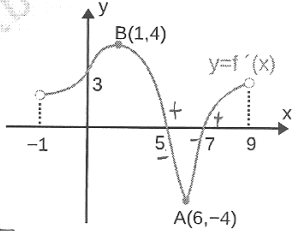


$-2, 5, 7, -3$ grafikten

- 2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x^5-4x^2+mx+2$ fonksiyonu $x=1$ de ekstremuma sahipse m kaçtır?

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0 \\ f'(x) &= 5x^4 - 8x + m \\ f'(1) &= 5 - 8 + m = 0 \rightarrow m = 3/4 \end{aligned}$$

- 3) $y=f'(x)$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisini belirleyiniz.



$x=7$ yerel min apsidir,

- 4) $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+8x+1$ fonksiyonun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarını bulunuz?

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x+8 \rightarrow x=-4 \text{ aralıktaki değil} \\ f(-2) &= 4-16+1 = -11 \text{ yerel min} \\ f(3) &= 9+24+1 = 34 \text{ yerel max} \end{aligned}$$

- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=x|x|$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri var mıdır?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$y=x \cdot |x|$

yerel min yoktur! daima artan

- 6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=mx^3-3x^2+x+n$ fonksiyonun tersi yoksa m kaçtır?

daima artan/azalan olmalıdır, türevinin farklı 2 kökü olmalı

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3mx^2 - 6x + 1 \quad \Delta > 0 \\ 36 - 4 \cdot 3m \cdot 1 &> 0 \\ m &< 3 \end{aligned}$$

- 7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y=f(x)=\frac{x^2+mx+2}{x+3}$ yerel ekstremum değerleri çarpımı 4 ise m kaçtır?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+m)(x+3) - (x^2+mx+2)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{2x^2+6x+mx+3m-x^2-mx-2}{(x+3)^2} \\ &= \frac{x^2+6x+3m-2}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

kökler buradan

$$x_1 \cdot x_2 = 4 \Rightarrow \frac{3m-2}{1} = 4 \quad \left(\frac{c}{a}\right)$$

$$m = 2$$