

## TRİGONOMETRİ - 4

### TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

#### TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

$f:A \rightarrow B$  ye tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için,  $f$  fonksiyonunun bire bir ve örten olması gerekir.

$f:A \rightarrow B$ ,  $y=f(x)$  fonksiyonu bire bir ve örten olsun.

$f^{-1}:B \rightarrow A$ ,  $y=f^{-1}(x)$  ters fonksiyonu da bire bir ve örterdir.

Önce, trigonometrik fonksiyonların bire bir ve örten oldukları bir aralığı bulacağız. Sonra, bu aralıkta trigonometrik fonksiyonların ters fonksiyonlarını tanımlayacağız. Hangi alt aralığı kabul ettiysek, ters trigonometrik fonksiyonlarda, daima kabul edilen o aralıkta işlemlerimizi yapacağız.

#### 1) ARKSİNÜS FONKSİYONU

$f:[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  fonksiyonu bire-bir ve

$$x \rightarrow y = \sin x$$

örten olduğundan terside bir fonksiyon olur.

$f^{-1}:[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  olarak tanımlanmış

$$x \rightarrow y = \sin^{-1} x$$

fonksiyona sinüs fonksiyonun tersi denir.

Kısaca  $\sin x = y \Leftrightarrow x = \sin^{-1} y = \arcsin y$  olur.

#### Örnek...1 :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$\sin^{-1} =$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}$$

#### Örnek...2 :

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = ?$$

$$\downarrow$$

$$\sin^{-1}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

#### Örnek...3 :

$$\arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = ?$$

$$\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4}$$

#### Örnek...4 :

$$\cos(\arcsin(\frac{4}{5})) = ?$$

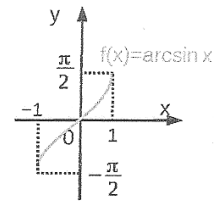
$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

3-4-5 üçgeninden açının kosinüsü bulunur

$$\frac{3}{5}$$

#### Örnek...5 :

$f(x) = \arcsin x$  fonksiyonunun grafiği  $[-1, 1]$  aralığında çizilmiştir inceleyiniz.



#### Örnek...6 :

$f(x) = \arcsin(3x-2)$  fonksiyonunun tanımlı olması için  $x$  hangi reel sayı aralığından seçilmelidir?

$$-1 \leq 3x-2 \leq 1$$

$$\left[\frac{1}{3}, 1\right]$$

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

#### 2) ARKKOSİNÜS FONKSİYONU

$f:[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  fonksiyonu bire-bir ve

$$x \rightarrow y = \cos x$$

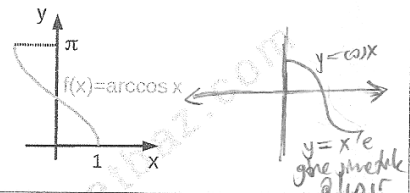
örten olduğundan terside bir fonksiyon olur.

$f^{-1}:[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  olarak tanımlanmış

$$x \rightarrow y = \cos^{-1} x$$

fonksiyona kosinüs fonksiyonun tersi denir.

Kısaca  $\cos x = y \Leftrightarrow x = \cos^{-1} y = \arccos y$  olur.



#### Örnek...7 :

$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3}$$

# TRİGONOMETRİ - 4

## TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Örnek...8 :

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = ? \quad 150^\circ$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

Örnek...9 :

$f(x) = \arccos(3x+2) - 4$  fonksiyonun tersi olan fonksiyonu bulunuz?

$$\arccos(3x+2) = y+4$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\cos(x+4)-2}{3}$$

$$\cos(y+4) = 3x+2$$

$$\frac{\cos(y+4)-2}{3} = x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\cos(x+4)-2}{3}$$

Örnek...10 :

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = ? \quad \sqrt{2}/2$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Örnek...11 :

$$\sin(\arccos(x)) = ?$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos \alpha = x$$

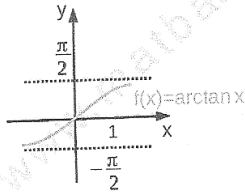
### 3) ARKTANJANT FONKSİYONU

$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bire-bir ve örten  $x \rightarrow y = \tan x$  olduğundan terside bir fonksiyon olur.

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  olarak tanımlanmış

$x \rightarrow y = \tan^{-1} x$  fonksiyona tanjant fonksiyonun tersi denir.

Kısaca  $\tan x = y \Leftrightarrow x = \tan^{-1} y = \arctan y$  olur.



Örnek...12 :

$$\arctan(\sqrt{3}) = ? \quad 60^\circ$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = \pi/3$$

$$\frac{\pi}{3}$$

Örnek...13 :

$$\arctan(-1) = ?$$

$$-45^\circ$$

$$-\frac{\pi}{4}$$

$$\tan \alpha = -1$$

Örnek...14 :

$$\sec(\arctan(\frac{3}{4})) = ?$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{4/5}$$

$$\frac{5}{4}$$

$$\sec \alpha = ?$$

### 4. ARKKOTANJANT FONKSİYONU

$f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu bire-bir ve örten  $x \rightarrow y = \cot x$  olduğundan terside bir fonksiyon olur.

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$  olarak tanımlanmış

$x \rightarrow y = \cot^{-1} x$  fonksiyona kotanjant fonksiyonun tersi denir.

Kısaca  $\cot x = y \Leftrightarrow x = \cot^{-1} y = \text{arccot} y$  olur.

Örnek...15 :

$$\text{arccot}(1) = ?$$

$$\cot \alpha = 1$$

$$\alpha = \pi/4$$

$$\frac{\pi}{4}$$

Örnek...16 :

$$\cos(\text{arccot}(1/2)) = ?$$

$$\cot \alpha = 1/2$$

$$\cos \alpha = ?$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Örnek...17 :

$$\tan(\arcsin(0.6)) = ?$$

$$\sin \alpha = 6/10$$

$$\tan \alpha = ?$$

$$\tan \alpha = 3/4$$

$$\frac{3}{4}$$

## DEĞERLENDİRME

1)  $\tan\left(\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) = ?$

$\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pi - \pi/4$

$\tan(\pi - \pi/4) = -\tan \pi/4 = -1$

-1

2)  $\arcsin\left(\frac{1}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{-1}{5}\right) = ?$

$\theta - \theta = 0$

0

3)  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right) = ?$

$\theta + \pi - \theta = \pi$

 $\pi$ 

4)  $f(x) = 4 + 3\sin(5x + 10)$  fonksiyonun tersi olan fonksiyonu bulunuz?

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\arcsin\left(\frac{x-4}{3}\right) - 2$

$y = 4 + 3\sin(5x + 10) \Rightarrow \frac{y-4}{3} = \sin(5x + 10)$

$5x + 10 = \arcsin\left(\frac{y-4}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{\arcsin\left(\frac{y-4}{3}\right) - 10}{5}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}\left[\arcsin\left(\frac{x-4}{3}\right) - 10\right]$

5)  $f(x) = 4 + 3\arcsin(3x - 2)$  fonksiyonun tersi olan fonksiyonu bulunuz?

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left(\sin\left(\frac{x-4}{3}\right) + 2\right)$

$y = 4 + 3\arcsin(3x - 2) \Rightarrow \frac{y-4}{3} = \arcsin(3x - 2)$

$3x - 2 = \sin\left(\frac{y-4}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{\sin\left(\frac{y-4}{3}\right) + 2}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{x-4}{3}\right) + 2\right]$

6)  $\left(\arccos\left(2x + \frac{5}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$  ise x kaçtır?

$\cos \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = 2x$

$-\frac{2}{6} = 2x \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$

 $-\frac{1}{6}$ 

7)  $A = \arcsin\left(\frac{x}{2x+3}\right) = \arctan\left(\frac{x}{2x+2}\right)$  ise x kaçtır?

$\sin A = \frac{x}{2x+3}$

$\tan A = \frac{x}{2x+2}$

$\triangle ABC$  with sides  $2x+3$ ,  $2x+2$ , and hypotenuse  $5$ .  $\Rightarrow 5 \frac{13}{12}$   $x=5$

8)  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = ?$   $\sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$