

PERİYOT

Mevsimler, haftanın günleri, dünyanın güneşin etrafındaki hareketleri tekrarlanır. Bu tür olayların periyodik olarak meydana geldiğini söyleyebiliriz.

Matematikte de bazı fonksiyonların grafikleri belli aralıklarda kendilerini yinelerler. Bu tür fonksiyonlar periyodik fonksiyon olarak adlandırılır.

PERİYODİK FONKSİYONUN TANIMI

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunda A kümesinin her $x \rightarrow y = f(x)$ x elemanı için $f(x+T) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir T reel sayısı varsa, f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, T sayısına f fonksiyonunun periyodu denir.

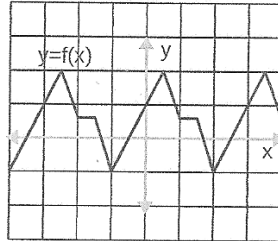
Bir fonksiyon birden fazla periyoda sahip olabilir. Periyodun birden fazla olması durumunda pozitif en küçük olanına **esas periyot** denir.

Örnek...1 :

Şekilde grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonun periyodu kaçtır?

$$T = 3$$

↳ esas



Örnek...2 :

$f(x) = \sin x$ fonksiyonun periyodunu araştırınız.

$$f(x+T) = f(x)$$

$$f(x+T) = \sin(x+T)$$

$$\sin(x+T) = \sin x$$

$$\downarrow$$

$$0, 2\pi, 4\pi, \dots, -2\pi, -4\pi, \dots$$

$$\downarrow$$

(esas periyot)

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN PERİYOTLARI

k bir tam sayı ve x tanım kümelerinin herhangi bir elemanı olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \sin(x+k \cdot 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x+k \cdot 2\pi) &= \cos x \\ \tan(x+k \cdot \pi) &= \tan x \\ \cot(x+k \cdot \pi) &= \cot x \end{aligned} \right\} \text{ esas periyot}$$

olduğundan trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir.

GENELLEMELER

1. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının periyodu $k \cdot 2\pi$,
 $\tan x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarının periyodu $k \cdot \pi$ dir.

$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının esas periyodu ($k = 1$ için) 2π ; $\tan x$ ve $\cot x$ fonksiyonlarının esas periyodu π dir.

2. $f(x) = a + b \cdot \sin^m(px+q)$ fonksiyonlarının
 $f(x) = a + b \cdot \cos^m(px+q)$

$$\text{esas periyodu } T \text{ ise } T = \begin{cases} \frac{2\pi}{|p|} & ; m \text{ tekse} \\ \frac{\pi}{|p|} & ; m \text{ çiftse} \end{cases}$$

3. $f(x) = a + b \cdot \tan^m(px+q)$ fonksiyonlarının
 $f(x) = a + b \cdot \cot^m(px+q)$

$$\text{periyodu } T \text{ ise } T = \frac{\pi}{|p|}$$

Örnek...3 :

$f(x) = \sin^5(10x-2)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

$$\frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{5}$$

Örnek...4 :

Fonksiyon	$5\cos^2(4x)$	$2-\tan^3(3x)$	$3+2\sin^7(1-5x)$	$\cot^{15}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{5}\right)$
Periyot	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{5\pi}{3}$$

TRİGONOMETRİ - 3

PERİYOT VE GRAFİKLER

$f(x)=g(x)\pm h(x)$ fonksiyonlarının esas periyodu, $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının esas periyotlarının en küçük ortak katına (e.k.o.k. una) eşittir. Eğer, $f(x)=h(x).g(x)$ in esas periyodu bulunacaksa, $f(x)$ i fonksiyonların toplamı biçiminde yazarız. Sonrada toplanan fonksiyonların esas periyotlarının en küçük ortak katı alınır.

$$\text{EKOK}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{EKOK}(a, c)}{\text{EBOB}(b, d)}$$

Örnek...5:

$f(x)=2.\sin(9x+3)-3.\tan(6x-7)+5$ fonksiyonun periyodu kaçtır?

$$T_1 = \frac{2\pi}{9} \quad T = \text{EKOK}\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$T_2 = \frac{\pi}{6} \quad T = \text{EKOK} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

Örnek...6:

$f(x)=2.\cos^3(4x)+2.\cot(5x+1)$ fonksiyonun periyodu kaçtır?

$$T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad T_2 = \frac{\pi}{5}$$

$$T = \frac{10\pi}{20} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$$

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken,

1) Fonksiyonun esas periyodu bulunur.
2) Bulunan periyoda uygun bir aralık seçilir.

3) Seçilen aralıkta fonksiyonun değişim tablosu yapılır. Bunun için, fonksiyonun bazı özel reel sayılarda alacağı değerlerin tablosu yapılır. Tabloda fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden küçük ise (aldığı değer artmış ise) o aralığa ↗ sembolünü yazarız. Eğer, fonksiyonun aldığı değer bir sonraki aldığı değerden büyük ise (aldığı değer azalmış ise) o aralığa ↘ sembolünü yazarız.

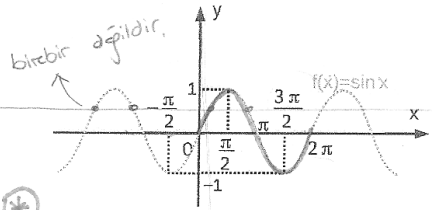
4. Seçilen bir periyotluk aralıkta fonksiyonun grafiği çizilir. Oluşan grafik, fonksiyonun periyodu aralığında tekrarlanacağı unutulmamalıdır.

Örnek...7:

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ fonksiyonun grafiği çizilmiştir, $x \rightarrow y = \sin x$ inceleyiniz.

Sinüs fonksiyonunun esas periyodu 2π dir. Bu nedenle grafiği $[0, 2\pi]$ aralığında inceleyerek çizeceğiz.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



Burada dikkat edilirse $y=f(x)=\sin x$ fonksiyonu

1. Bire bir değildir. Fakat $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ $x \rightarrow y = \sin x$ fonksiyonu birebir ve örtendir.

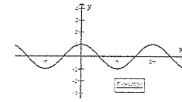
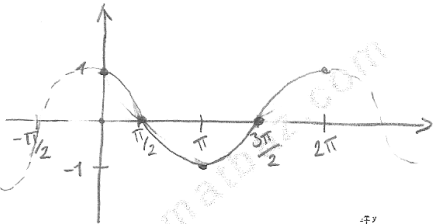
2. Tek fonksiyondur. $\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ orijine göre simetrik

Örnek...8:

$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ $x \rightarrow y = \cos x$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$$T = 2\pi$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



Not: Grafiklerin bir periyot için çizimi yapıldı. Sonraki

TRİGONOMETRİ - 3

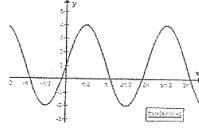
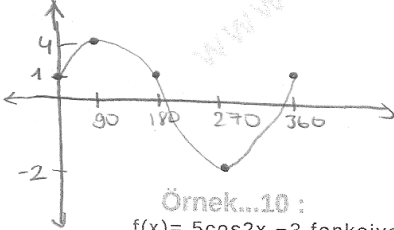
PERİYOT VE GRAFİKLER

Örnek...9 :

$f(x) = 3 \cdot \sin x + 1$ fonksiyonun grafiğini $[0, 4\pi]$ aralığında çiziniz.

$T = 2\pi$

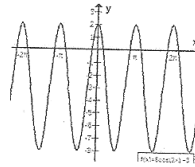
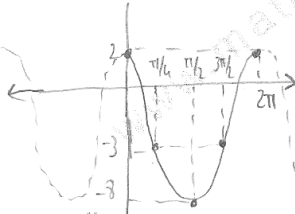
x	0	90	180	270	360
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$3 \sin x + 1$	1	4	1	-2	1



Örnek...10 :

$f(x) = 5 \cos 2x - 3$ fonksiyonun grafiğini $[0, 2\pi]$ çiziniz. $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$5 \cos 2x$	5	0	-5	0	5
$5 \cos 2x - 3$	2	-3	-8	-3	2



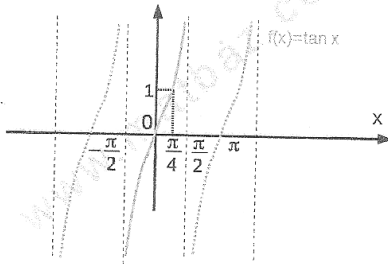
Örnek...11 :

$f: \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun grafiği çizilmiştir.

$x \rightarrow y = \tan x$

İnceleyiniz.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	-1	0	1	∞



Dikkat edilirse $y = \tan x$ fonksiyonu

1. Tek fonksiyondur ama bire bir değildir.

2. $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve $x \rightarrow y = \tan x$ örtendir.

Örnek...12 :

$f: (-3\pi, +3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$x \rightarrow y = \tan(x + \frac{\pi}{2})$ (Tanımlı olduğu değerler için) $T = \pi$

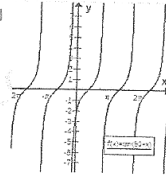
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\tan(x + \frac{\pi}{2})$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$

bu grafik $y = \tan x$ $\frac{\pi}{2}$ birim x ekseninde

sağa ötelenek de elde edilebilir.

* $f(x+c)$ fonksiyonu $f(x)$ x ekseninde

c birim sağa ötelenir ile bulunur. (c > 0)

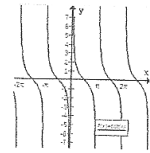
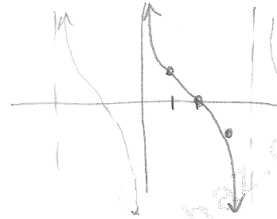


Örnek...13 :

$f: \mathbb{R} - \{k\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$x \rightarrow y = \cot x$

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$\cot x$	$+\infty$	1	0	-1	$-\infty$



TRİGONOMETRİ - 3

PERİYOT VE GRAFİKLER

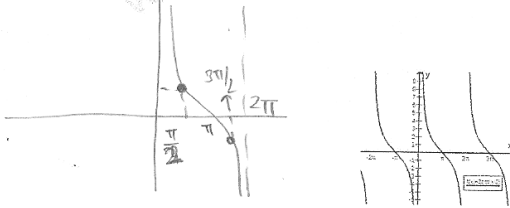
Örnek...14 :

$f: (0, 3\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow y = 2 \cot \frac{x}{2}$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

$$T = \pi / \frac{1}{2} = 2\pi$$

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\frac{x}{2}$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2 \cot \frac{x}{2}$	$+\infty$	2	0	-2	$-\infty$



DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = 7 - 4 \sin^2(5x + 1) - 3 \cos^2(3 - 4x)$ fonksiyonun periyodu kaçtır?

ökeş $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{4} \right)$ 2π

$$\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\text{ökeş}(8\pi, 5\pi)}{20} = \frac{40\pi}{20} = 2\pi$$

- 2) $f(x) = 7 \sin^4(5x + 10)$, $g(x) = 3 \cot^2(3mx - 4x + 9)$ fonksiyonlarının periyodları eşitse m kaç olabilir?

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{|3m-4|} \cdot \frac{-1}{3} \text{ veya } 3$$

$$|3m-4| = 5 \rightarrow 3m-4 = 5 \rightarrow m = 3 \text{ veya } 3m-4 = -5 \rightarrow m = -1/3$$

ökeş $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \right) = \frac{\text{ökeş}(a, c, e)}{\text{ökeş}(b, d, f)}$

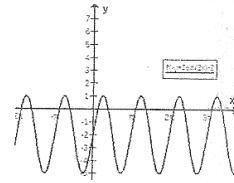
- 3) $y = f(x) = a \sin(bx + c) + k$ türündeki fonksiyonların grafiklerini katsayıları ile ilişkilendiriniz.

$a \rightarrow$ genlik $b \rightarrow$ frekans $c \rightarrow$ faz değişim (yatay öteleme)

$k \rightarrow$ dikey öteleme (diğerleri değeriştirir)

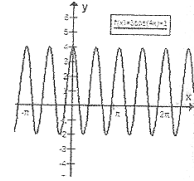
- 4) $f(x) = 3 \sin x - 2$ fonksiyonun grafiğini $[0, 4\pi]$ çiziniz.

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$3 \sin x - 2$	-2	-1	-2	-3	-2



- 5) $f(x) = 3 \cos 4x + 1$ fonksiyonun grafiğini $[0, \pi]$ çiziniz.

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$
$4x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$3 \cos 4x + 1$	4	1	-2	1	4



- 6) $f(x) = \tan 4x + 1$ fonksiyonun grafiğini $[0, \pi]$ çiziniz. (tanımlı olduğu değerler için)

$$T = \pi/4$$

x	$-\pi/8$	0	$\pi/8$
$4x$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\tan 4x + 1$	$-\infty$	1	$+\infty$

