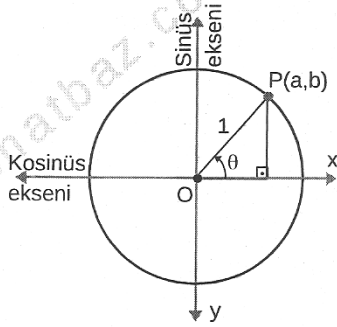


TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR BİR AÇININ KOSİNÜS VE SİNÜS DEĞERLERİ

Merkezi orijin ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir. Standart pozisyonda (Köşesi orijinde, başlangıç kenarı x eksenine ve yönü pozitif yön olan açı) ve ölçüsü θ olan açının birim çember üzerinde yay bitim noktası $P(a,b)$ olsun:



A) $\cos(\theta)=a$ olarak tanımlanır. O_x eksenine kosinüs eksenine denir.

θ reel sayısını $\cos \theta$ ile eşleyen fonksiyona **kosinüs fonksiyonu** denir.

Kosinüs Fonksiyonu

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$

$\theta \rightarrow \cos \theta$

Burada $\cos \theta$ nin değer aralığı $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ dir.

Ayrıca, $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos \theta$ dir.

B) $\sin(\theta)=b$ olarak tanımlanır. O_y eksenine ise sinüs eksenine denir

θ reel sayısını $\sin \theta$ ile eşleyen fonksiyona **sinüs fonksiyonu** denir

Sinüs Fonksiyonu

$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$

$\theta \rightarrow \sin \theta$

Burada $\sin \theta$ nin değer aralığı $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ dir.

Ayrıca, $\sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \sin \theta$ dir.

SONUÇ

OKP dik üçgenin de $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ dir.

Örnek...1 :

Birim çember kullanarak aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\sin 90^\circ$

$B(0,1)$
 $\sin 90$

b) $\cos 180^\circ = -1$

$C(-1,0)$
 $\cos 180$

c) $\sin 225^\circ$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos 330^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Örnek...2 :

$$\frac{\sin^2 12 + \cos^2 12 - 1}{\sin 67 + \cos 34 \cdot \sin 41} = 0$$

işleminin sonucu kaçtır?

0

Örnek...3 :

$$a = \frac{13 + 5 \sin x}{3}$$

ise a kaç farklı tam sayı değeri alır?

4

$$\frac{13 - 5}{3} \leq \frac{13 + 5 \sin x}{3} \leq \frac{13 + 5}{3}$$

$$\frac{8}{3} \leq a \leq 6$$

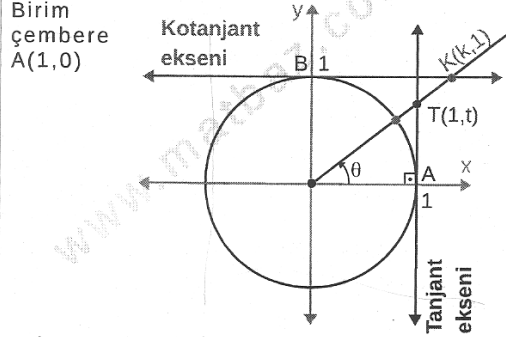
3, 4, 5, 6

4 değer

TRİGONOMETRİ – 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

BİR AÇININ TANJANT VE KOTANJANT DEĞERLERİ



noktasından çizilen teğete **tanjant eksenini**, B(0,1) noktasından çizilen teğete de **kotanjant eksenini** denir.

Bir açının tanjant (kotanjant) değeri bulunurken şu adımlar izlenir :

Adım 1) Verilen açiya eşit olan pozitif yönlü standart biçimli yayın bitim noktası birim çemberde işaretlenir,

Adım 2) Yay bitim noktası ve orijini birleştiren doğru çizilir,

Adım 3) Doğru tanjant eksenini ile kesiştirilir,

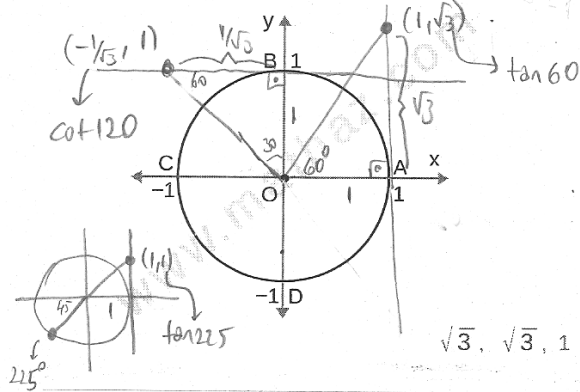
Adım 4) Kesim noktasının ordinatı açının tanjantıdır.

Aynı şekilde kotanjant değeri de yay bitim ve orijini birleştiren doğrunun (veya uzantısının) kotanjant eksenini kestiği noktanın apsisisdir.

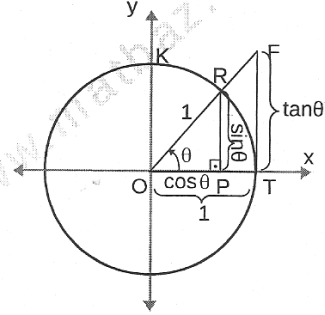
Örnek...4 :

Birim çember kullanarak aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

- a) $\tan 60^\circ$ b) $\cot 120^\circ$ c) $\tan 225^\circ$



DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK DEĞERLERİ



POR dik üçgeninde $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ elde edilir

Şekildeki POR ve TOF üçgenlerinin benzerliğinden

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \text{ ve}$$

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

elde edilir.

Bu benzerliğin rastgele benzer bir dik üçgene uygulanmasıyla

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r}, \sin(\theta) = \frac{y}{r}, \tan(\theta) = \frac{y}{x}, \cot(\theta) = \frac{x}{y}$$

elde edilir.

TRİGONOMETRİK ÖZDEŞLİKLER

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \text{ ve } \tan(\theta) \cdot \cot(\theta) = 1 \text{ dir.}$$

Ayrıca birbirini 90° ye ($\frac{\pi}{2}$ ye)

tamamlayan açılar için
birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne;
birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir. Yani,

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin(\theta), \tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} = \cot(\theta)$$

Örnek...5 :

$$\frac{5 \sin x}{9} = \frac{\cos x}{\tan x \cdot \cot x + 2} \text{ ise } \tan x \text{ kaçtır?}$$

$$\frac{5 \sin x}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow 5 \sin x = 3 \cos x$$

$$15 \sin x = 9 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan x = \frac{3}{5}$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

Örnek...6 :

$\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \dots + \cos^2 90^\circ$ kaçtır?

Handwritten solution for Örnek...6:

$$1-89 \begin{cases} 2-88 \\ 3-87 \\ \vdots \\ 44-46 \end{cases} \text{ tuncuklar } 44 \text{ çift}$$

$$44 \cdot 1 + \cos^2 45 + \cos^2 90$$

$$44 + \frac{1}{2} + 0 = 44,5$$

Örnek...7 :

x dar bir açı olmak üzere, $\cos(x) = \frac{2}{3}$ ise $\sin^2(x) - \tan^2(x)$ kaçtır?

Handwritten solution for Örnek...7:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{5}{4} = -\frac{25}{36}$$

Örnek...8 :

$\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} + \sin^2 x + \cos^2 x = ?$

Handwritten solution for Örnek...8:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} + 1 = \frac{-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Örnek...9 :

TBZ bir dik üçgen

$m(\angle TMZ) = 90^\circ$

$m(\angle BTZ) = 90^\circ$

$|TM| = 6br$

$|MZ| = 4br$ ise

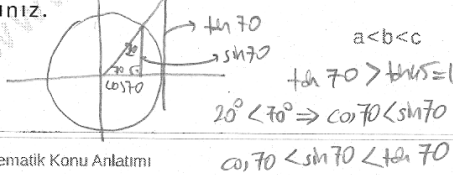
$\cos(\angle TBM)$ kaçtır?

Handwritten solution for Örnek...9:

$$\cos(\angle TBM) = \frac{BM}{TB} = \frac{6}{3\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Örnek...10 :

$a = \cos 70^\circ$, $b = \sin 70^\circ$, $c = \tan 70^\circ$ sayılarını sıralayınız.



SEKANT VE KOSEKANT FONKSİYONLARI :

Standart pozisyonda (köşesi orijin ve başlangıç kenarı O_x eksenini)

verilmiş ve ölçüsü θ olan açının

birim çember üzerinde

gördüğü

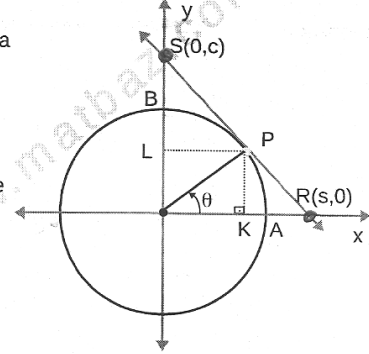
yayın bitim noktası $P(x,y)$ noktası olsun.

$P(x,y)$ noktasında birim çembere çizilen teğetin x eksenini kestiği R noktasının

apsisi $\sec \theta$ nin sekantı ; y eksenini kestiği S noktasının ordinatına $\csc \theta$ nin

kosekantı denir. θ reel sayısını $\sec \theta$ ile eşleyen fonksiyona sekant fonksiyonu;

$\csc \theta$ ile eşleyen fonksiyona ise kosekant fonksiyonu denir.



SONUÇLAR

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}$$

Örnek...11 :

Tabloda boş kalan yerleri doldurunuz.

	1. Bölge	2. Bölge	3. Bölge	4. Bölge
cos	+	-	-	+
sin	+	+	-	-
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-
sec	+	-	-	+

Örnek...12 :

$a = \cos 190^\circ$, $b = \sin 170^\circ$, $c = \tan 70^\circ$, $d = \sec 320^\circ$

$e = \csc 179^\circ$ sayılarının işaretlerini belirleyiniz.

++++

Örnek...13 :

$\sqrt{2} \cdot (\tan 30^\circ \cos 45^\circ + \csc 60^\circ \sin 45^\circ) = ?$

Handwritten solution for Örnek...13:

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

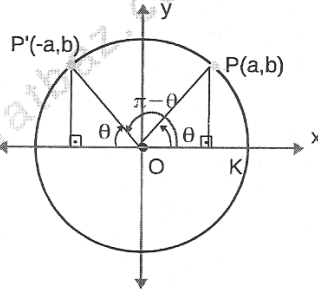
TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

İNDİRGEME BAĞINTILARI

Şekli inceleyiniz.

Birim çemberde standart biçimde ve ölçüsü θ radyan olan bir dar açı alalım. Bu açının gördüğü yayın bitim noktasının koordinatı $P(a,b)$ olsun. $\cos \theta = a$, $\sin \theta = b$, $\tan \theta = b/a$ olmak üzere, $\pi - \theta$ ve $\frac{\pi}{2} - \theta$ türündeki açılarının trigonometrik oranları şöyle hesaplanır.



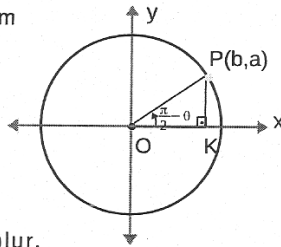
$\pi - \theta$ BİÇİMİNDEKİ AÇILAR

$\pi - \theta$ 'lık yayın bitim noktası $P'(-a, b)$ olacağından :
 $\cos(\pi - \theta) = -a = -\cos \theta$
 $\sin(\pi - \theta) = b = \sin \theta$
 $\tan(\pi - \theta) = -b/a = -\tan \theta$
 $\cot(\pi - \theta) = -a/b = -\cot \theta$ olur.

$\frac{\pi}{2} - \theta$ BİÇİMİNDEKİ AÇILAR

$\frac{\pi}{2} - \theta$ 'lık yayın bitim noktası $P(b, a)$ olacağından :

$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = b = \sin \theta$
 $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = a = \cos \theta$
 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$
 $\cot(\frac{\pi}{2} - \theta) = \tan \theta$ olur.



GENELLEME (GENEL İNDİRGEME BAĞINTISI)

Ölçüsü $(\frac{\pi}{2} \mp \theta)$ ($\pi \pm \theta$) ($\frac{3\pi}{2} \mp \theta$) ($2\pi - \theta$) olarak verilen ifadelerde π sadeleştirilmesi için

Adım 1 Açının bölgesinden yaralanılarak işaret bulunur. (Açı daima dar kabul edilir)

Adım 2 $\pi, 2\pi$ için isim değiştirilmez, $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ için isim $\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cot$

şeklinde değiştirilir.

Örnek...14 :

Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini bulunuz.

- 1) $\tan(180+x)$ $\tan x$ tanx
- 2) $\cos(90+2x)$ $-\sin 2x$ -sin2x
- 3) $\sin(270-4x)$ $-\cos 4x$ -cos4x
- 4) $\cot(90-7x)$ $\tan 7x$ tan7x
- 5) $\cos(360-4x)$ $\cos 4x$ cos4x
- 6) $\tan(270+8x)$ $-\cot 8x$ -cot8x
- 7) a) $\cos(-x)$ $\cos x$
 b) $\sin(-x)$ $-\sin x$
 c) $\tan(-x)$ $-\tan x$
 d) $\cot(-x)$ $-\cot x$
 e) $\operatorname{cosec}(-x)$ $-\operatorname{cosec} x$
 $\cos x$; $-\sin x$; $-\tan x$; $-\cot x$; $-\operatorname{cosec} x$
- 8) $\sin(+5x)$ $-\sin 5x$ -sin5x
- 9) $\tan(9x-270)$ $-\cot 9x$ -cot 9x
- 10) $\cot(4x-180)$ $\cot 4x$ cot4x
- 11) $\cos 240 + \sin 150$ 0
- 12) $\tan 135^\circ - \cos(-240) = ?$ -1/2

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

DEĞERLENDİRME

- 1) $\sin x + \cos x = 0,7$ ise $\sin x \cdot \cos x$ kaçtır?

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{49}{100} \quad \frac{-51}{200}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\frac{49}{100} - 1}{2} = \frac{-51}{200}$$

- 2) $\sin x = 0,8$ ise $\sin^4 x + \cos^4 x$ kaçtır? $\cos x = 0,6$

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{337}{625}$$

$$1 - 2 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,6)^2 = \frac{337}{625}$$

$$1 - 2 \cdot \frac{16}{25} \cdot \frac{9}{25} = 1 - \frac{288}{625} = \frac{337}{625}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x = m^2$$

- 3) $\cos x - \sin x = m$ ise $\cos^3 x - \sin^3 x$ m türünden nedir?

$$(\cos^3 x - \sin^3 x) = (\cos x - \sin x) (\cos^2 x + (\cos x)(\sin x) + \sin^2 x)$$

$$= m \cdot [1 + (\cos x)(\sin x)]$$

$$= m \cdot [1 + \frac{1-m^2}{2}] = m \cdot [\frac{3-m^2}{2}]$$

- 4) $\tan x + \cot x = m$ ise $\tan^3 x + \cot^3 x$ m türünden nedir?

$$(\tan x + \cot x) \cdot (\tan^2 x - \tan x \cot x + \cot^2 x) = m^3 - 3m$$

$$m \cdot [m^2 - 2 - 1] = m^3 - 3m$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x = m^2$$

- 5) $a = \cos 10^\circ$, $b = \cos 20^\circ$, $c = \sin 50^\circ$ sayılarını sıralaması nasıldır?

$$a = \sin 80^\circ \quad b = \sin 70^\circ \quad c = \sin 50^\circ \quad a > b > c$$

- 6) $a = \tan 100^\circ$, $b = \tan 120^\circ$, $c = \tan 150^\circ$ sayılarını sıralaması nasıldır?

$$a = -\tan 80^\circ \quad b = -\tan 60^\circ \quad c = -\tan 30^\circ \quad a < b < c$$

- 7) $\tan 1^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \tan 5^\circ \dots \tan 89^\circ$ kaçtır?

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1}{22 \cdot 22 \cdot 1} = 1$$

- 8) $\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} + \cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \cos x} + \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 + 2 \cos x$$

$$1 + \cos x + \cos x = 1 + 2 \cos x$$

- 9) $\left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \cdot \tan x$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{\sin x (\sin x (\cos x - 1) - \sin x (\cos x + 1))}{(1 - \cos^2 x)} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{2 \sin x \cos x \sin x}{\sin^2 x \cdot \cos x} = 2$$

- 10) $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \operatorname{cosec}^2 x + \cot^2 x}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\frac{\sin^2 x - 1}{-\cos^2 x}} = -1$$

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x} = -1$$

- 11) $\sin \left(\frac{7\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{7\pi}{4} \right) = ?$

$$\sin 315^\circ + \cos 315^\circ = 0$$

TRİGONOMETRİ - 2

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

12) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sin(x-2\pi)}{\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{-\sin x - (-\sin x)}{\cot\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{0}{\cot\frac{5\pi}{4}} = 0$$

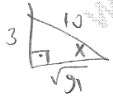
13) $\sin x = a$ ise $\sin(\pi+x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \sin(-\pi-x)$ ifadesinin a türünden eşiti nedir?

$$-\sin x - \sin x - (-\sin x) = -\sin x = -a$$

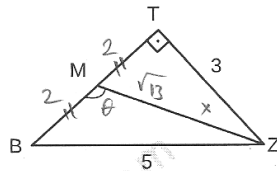
14) $x+y=\frac{\pi}{5}$ ve $\sin x=0,3$ ise $\cos(4x+5y)$ kaçtır?

$$5x+5y=\pi \quad \frac{-\sqrt{91}}{10}$$

$$\cos(\pi-x) = -\cos x = -\frac{\sqrt{91}}{10}$$



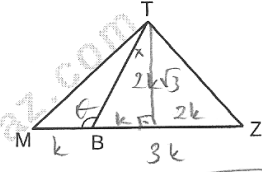
- 15) Şekilde M orta nokta, TBZ dik üçgendir. $|TZ|=3br$, $|BZ|=5br$ ise $\cos(BMZ)$ kaçtır?



$$\theta = 90+x \quad \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \theta = \cos(90+x) = -\sin x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

- 16) Şekilde MTZ eşkenar üçgendir. $|MZ|=4, |MB|$ ise $\cos(MBT)$ kaçtır?



$$\theta = 90+x \quad |MB| = \sqrt{(2k\sqrt{3})^2 + k^2} = k\sqrt{13}$$

$$\cos(\theta) = \cos(90+x) = -\sin x = -\frac{k}{k\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

- 17) $\tan 24^\circ = p$ ise $\frac{\tan 114^\circ - \tan 156^\circ}{\tan 564^\circ - \tan 225^\circ}$ ifadesinin a türünden eşiti nedir?

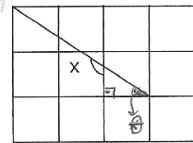
$$\frac{-\cot 24 + \tan 24}{\tan 24 - \tan 45} = \frac{-\frac{1}{p} + p}{p-1}$$

$$\frac{p^2-1}{p} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{p+1}{p}$$

- 18) $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$ kaçtır?

$$44.5 + \sin^2 45 + \sin^2 90 = 44.5 + \frac{1}{2} + 1 = 45.5$$

- 19) Eş kareler kullanılarak elde edilen şekilde ki x açısı için $\tan x$ kaçtır?



$$x = 90 + \theta \quad \tan x = \tan(\theta + 90) = -\cot \theta = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{-3}{2}$$