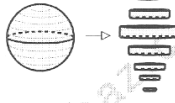


İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

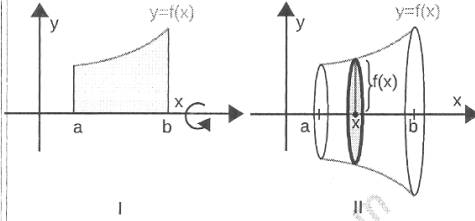
KATI CİSİMLERİN HACİMLERİ



İNTEGRAL İLE HACİM HESABI

1. X EKSENİNDE DÖNDÜRMELER

$y = f(x)$ denklemiyle temsil edilen eğrinin $[a, b]$ aralığına ait parçanın Ox eksenini etrafından döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulmak için şekil kesitlerin toplamı olarak ifade edilir. Şekli inceleyiniz



Kesit diskin hacmi $y = \pi r^2 \Delta x$, $(r=f(x))$ ve toplam hacim $V_x = \sum_{k=1}^n (\pi r^2 \Delta x)$, $(r=f(x))$

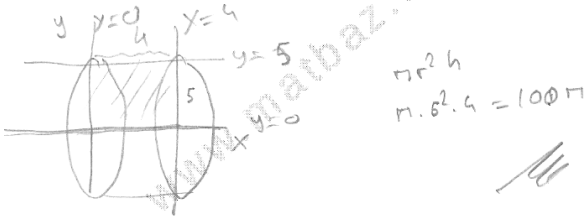
Bu toplam bir riemann toplamı olduğundan integral hesabın temel teoremini kullanarak aşağıdaki sonucu çıkarırız

$$V_x = \sum_{k=1}^n (\pi r^2 \Delta x), (r=f(x)) = \int_a^b (\pi f^2(x)) dx = \int_a^b \pi y^2 dx$$

burada döndürme x ekseninde olduğu için V_x yazdık.

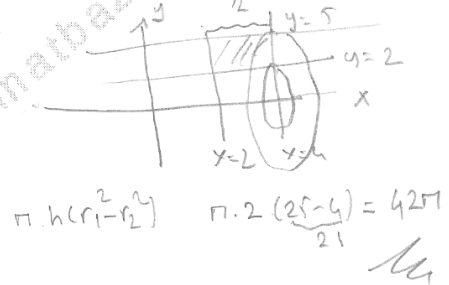
Örnek...1 :

$x=0, x=4, y=0, y=5$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmini bulunuz



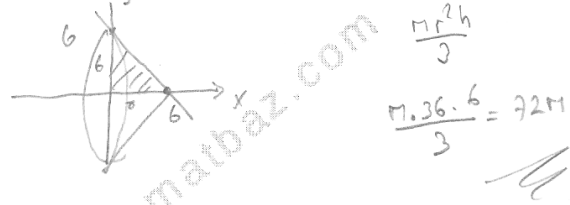
Örnek...2 :

$x=2, x=4, y=2, y=5$ doğruları arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmini bulunuz



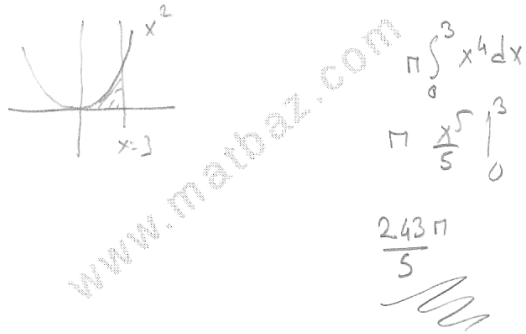
Örnek...3 :

$y = 6-x$ doğrusu ve birinci bölgede eksenler arasında kalan Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 dür?



Örnek...4 :

$y = x^2$ eğrisi ile $x = 3$ doğrusu ve x eksenini arasında kalan alanın Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 dür?

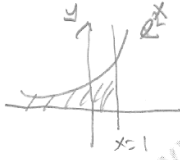


İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

Örnek...5 :

$y = e^x$ eğrisi ve $x = 1$ doğrusu ve eksenler arasında kalan bölgenin Ox eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 dür?



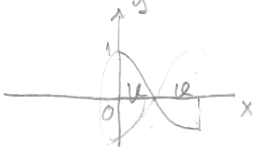
$$\pi \int_{-\infty}^1 e^{2x} dx$$

$$\frac{e^{2x}}{2} \Big|_{-\infty}^1$$

$$\pi \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) = \frac{\pi e^2}{2}$$

Örnek...6 :

$y = \cos x$ eğrisinin $x = 0$, $x = \pi$ doğruları ve x eksenini arasında kalan alanın yine ox eksenini etrafında döndürülmesinden meydana gelen cismin hacmi kaç br^3 dür?



$$2 \pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$$

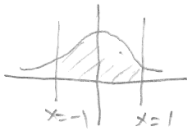
$$2 \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2x + 1}{2} dx = \pi \int_0^{\pi/2} \cos 2x + 1 dx$$

$$\pi \left(\frac{\sin 2x}{2} + x \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\pi \left(0 + \frac{\pi}{2} - (0 + 0) \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Örnek...7 :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ fonksiyonu ile $x = -1$, $x = 1$ ve x eksenini arasında kalan bölgenin O_x eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak kapalı şeklin hacmi kaç br^3 olur?

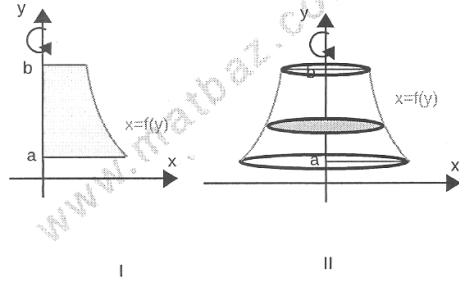


$$\pi \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\pi \left(\arctan x \right) \Big|_{-1}^1$$

$$\pi \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

2. Y EKSENİNDE DÖNDÜRMELER



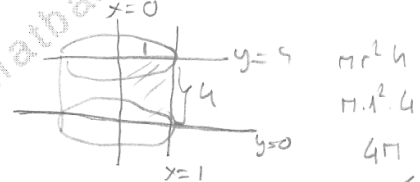
Benzer bir mantıkla

$V_y = \int_a^b (\pi f^2(y)) dy = \int_a^b \pi x^2 dy$ burada döndürme x ekseninde olduğu için V_y yazdık.

$y=f(x)$ verilip y ekseninde döndürülmesi istendiğinde sıklıkla ters bağıntı kullanırız

Örnek...8 :

$x=0$, $y=0$, $x=1$ ve $y=4$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?



$$\pi r^2 h$$

$$\pi \cdot 1^2 \cdot 4$$

$$4\pi$$

Örnek...9 :

$y = x^2 + 2$ eğrisi ile $y = 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 180° döndürülmesinden oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$x^2 = y - 2$$

$$\pi \int_2^4 (y-2) dy$$

$$\frac{y^2}{2} - 2y \Big|_2^4 = 8 - 8 - (2 - 4)$$

$$2\pi$$

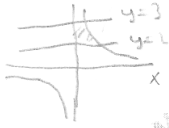


İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

Örnek...10 :

$y = \frac{2}{x}$ eğrisi ile $y = 2$, $y = 3$ ve $x=0$ doğrusu arasında kalan alanın Oy eksenini etrafında döndürülmesinden oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?



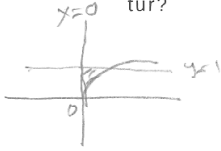
$$x = \frac{2}{y} \quad x^2 = \frac{4}{y^2}$$

$$\pi \int_2^3 \frac{4}{y^2} dy$$

$$\pi \left(-\frac{4}{y} \right) \Big|_2^3 = \frac{2}{3} \pi$$

Örnek...11 :

$y = \sqrt{x}$ eğrisi ile $x = 0$, $y = 1$ doğrusu arasında kalan alanın Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?

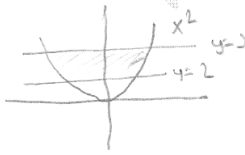


$$y^2 = x \quad x^2 = y^4$$

$$\pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \left(\frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Örnek...12 :

$y = x^2$ eğrisi ile $y = 2$, $y = 3$ ve $x=0$ doğrusu arasında kalan alanın Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?



$$\pi \int_2^3 y dy$$

$$\frac{\pi y^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{5\pi}{2}$$

Örnek...13 :

$y = \ln x$ eğrisi ve $y = 1$, $y = 2$ ve $x=0$ doğrusu ve eksenler arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 tür?



$$x = e^y \quad x^2 = e^{2y}$$

$$\pi \int_1^2 e^{2y} dy = \pi \left(\frac{e^{2y}}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi(e^4 - e^2)}{2}$$

Örnek...14 :

$y = x^2 + 1$ eğrisi $y = 3$ doğrusunun sınırladığı düzlemsel bölgenin Oy eksenini etrafında döndürülmesinden oluşan cismin hacmini bulunuz?



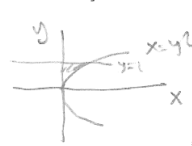
$$x^2 = y - 1$$

$$\pi \int_1^3 (y - 1) dy$$

$$\pi \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^3 = \pi \left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 \right) = 2\pi$$

Örnek...15 :

$x = y^2$ parabolü, Oy eksenini ve $y = 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin Oy etrafında döndürülmesiyle 360° oluşan katı cismin hacmi kaç br^3 tür?



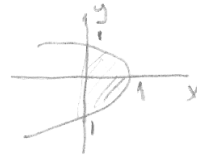
$$x^2 = y^4$$

$$\pi \int_0^2 y^4 dy$$

$$\pi \left(\frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

Örnek...16 :

$x = 1 - y^2$ parabolü ile $x = 0$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy eksenini etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br^3 tür?



$$x^2 = 1 - 2y^2 + y^4$$

$$\pi \int_0^1 (1 - 2y^2 + y^4) dy$$

$$-1 \quad y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}$$

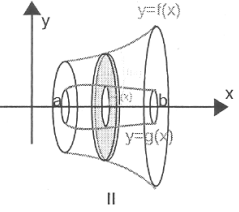
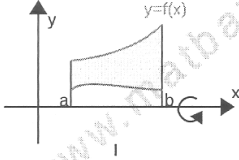
$$\pi \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{16\pi}{5}$$

İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

3. İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALANIN X EKSENİNDE DÖNDÜRÜLMESİ

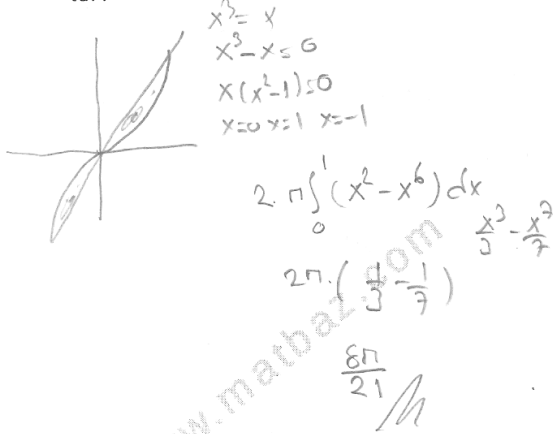
x ekseninde



İki eğri arasında kalan alanın ox ekseninde 360° döndürülmesinden elde edilen cismin hacmi

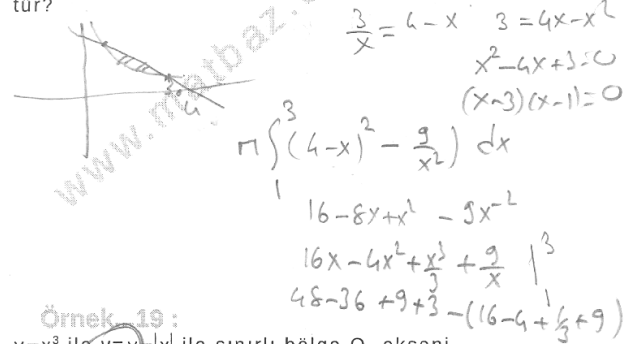
$$V_x = \int_a^b \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

Örnek...18 :
y = x³ eğrisi ile y = x doğrusu arasında kalan bölgenin Ox ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br³ tür?



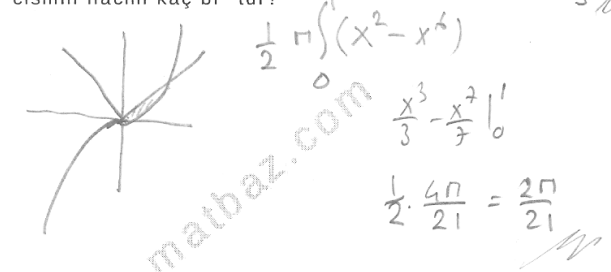
Örnek...18 :

y = 3/x eğrisi ile y = 4 - x doğrusu arasında kalan bölgenin Ox ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç br³ tür?



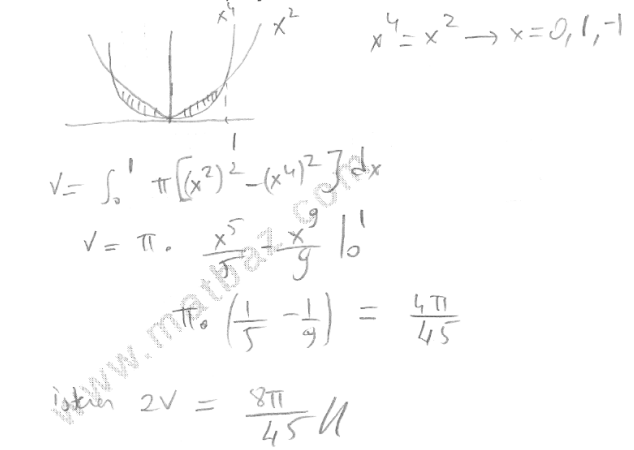
Örnek...19 :

y = x³ ile y = |x| ile sınırlı bölge Ox ekseninde 180° döndürüldüğünde oluşacak katı cismin hacmi kaç br³ tür?



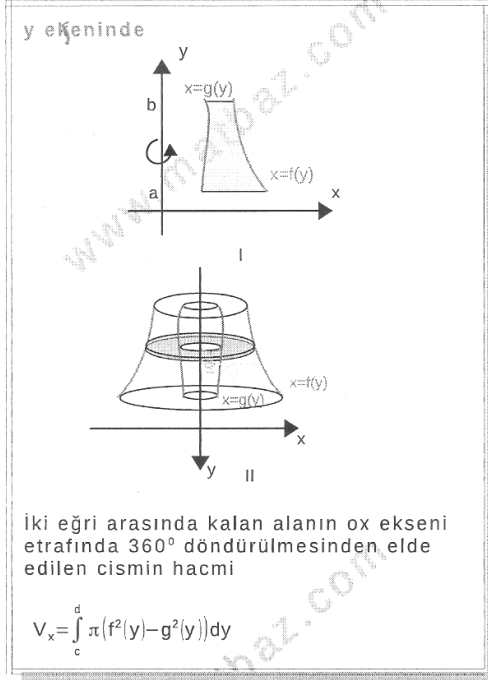
Örnek...20 :

y = x² ve y = x⁴ eğrileriyle sınırlı bölgenin Ox ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini hesaplayınız

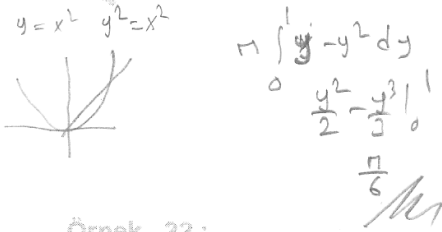


İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

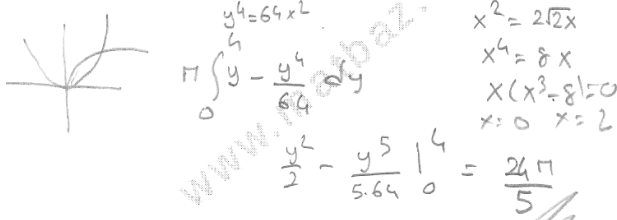


Örnek...21: $y=x^2$ ve $y=x$ eğrileriyle sınırlı bölgenin Oy etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan katı cismin hacmini hesaplayınız.



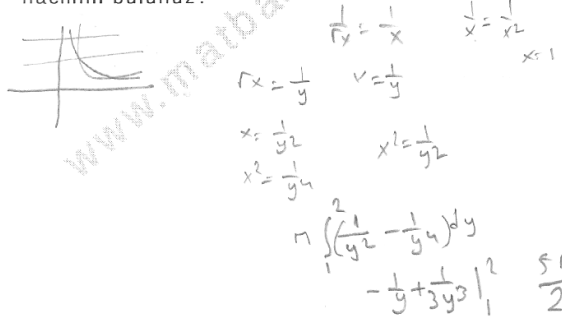
Örnek...22 :

$y=x^2$ ile $y^2=8x$ arasında birinci bölgede kalan bölgenin y ekseninde döndürülmesiyle oluşacak kapalı cismin hacmini bulunuz?



Örnek...23 :

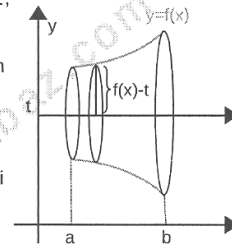
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ile $y = \frac{1}{x}$ ve $y=2$ arasında birinci bölgede kalan bölgenin y ekseninde döndürülmesiyle oluşacak kapalı cismin hacmini bulunuz?



4. Y=F(X) FONKİYONUNU Y=T DOĞRUSU ETRAFINDA DÖNDÜRME

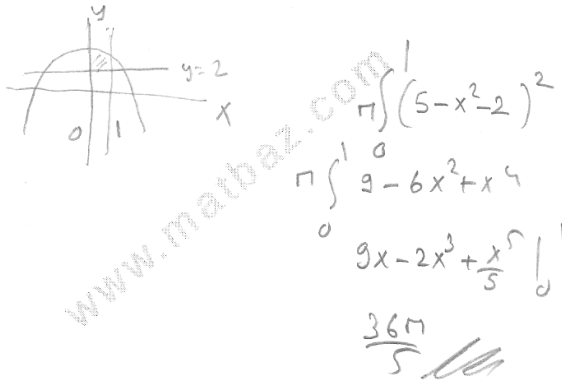
$y=f(x)$ eğrisi ile $y=t$, $x=a$, $x=b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $y=t$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V_x = \int_a^b \pi (f(x) - t)^2 dx$$



Örnek...24 :

$y=5-x^2$ parabolü ile $y=2$, $x=0$ ve $x=1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $y=2$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen cismin hacmini bulunuz?



İNTEGRAL-8

İNTEGRAL HESABI- HACİM HESABI

DEĞERLENDİRME

- 1) $y = x^4$ eğrisi ile $x = 2$ doğrusu ve x ekseninde kalan alanın Ox ekseninde etrafında 360° döndürülmesiyle oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$\pi \int_0^2 x^8 dx = \pi \left[\frac{x^9}{9} \right]_0^2 = \pi \frac{2^9}{9} = \frac{2048\pi}{9}$$


- 2) $y = x^2$ ile $y = \sqrt{x}$ eğrileri ile $x=1$ ve $x=4$ doğrularının sınırladığı bölgenin x ekseninde etrafında 360° döndürülmesi ile oluşacak hacmi hesaplayınız

$$y^2 = x^4 \quad y^2 = x$$

$$\pi \int_1^4 (x^4 - x) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \pi \left(\frac{1024}{5} - \frac{15}{2} \right) = \frac{2016\pi}{10}$$

- 3) $x = 16/y$ eğrisi ile $x = 0$, $y = 2$ ve $y = 8$ doğruları arasında kalan bölgenin Oy etrafında 270° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$\frac{3\pi}{4} \int_2^8 \frac{16}{y^2} dy = \frac{3\pi}{4} \left[-\frac{16}{y} \right]_2^8 = \frac{3\pi}{4} \left(-2 + \frac{8}{2} \right) = \frac{3\pi}{2}$$


- 4) $y = x^3$ ile $y = 4x$ arasında kalan bölgenin x ekseninde etrafında 270° döndürülmesi ile oluşacak hacmi hesaplayınız

$$x^3 = 4x \quad x = 0, 2, -2$$

$$\frac{3\pi}{4} \int_0^2 (4x - x^3) dx = \frac{3\pi}{4} \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{3\pi}{4} \left(8 - 4 \right) = \frac{3\pi}{2}$$


- 5) $x = y^2$ eğrisi ile $x = 0$, $y = 2$ doğrusu arasında kalan alanın Oy ekseninde etrafında 270° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$x = y^2$$

$$\frac{3\pi}{4} \int_0^2 y^4 dy = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{32}{5} = \frac{24\pi}{5}$$


- 6) $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin birinci bölgede kalan kısmının y ekseninde dönmesiyle oluşacak kapalı cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$x^2 = 4 - 4y^2$$

$$\pi \int_0^1 (4 - 4y^2) dy = \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$


- 7) $y = \sin x$ ile $y = \cos x$ ile sınırlı bölge Ox ekseninde etrafında 180° döndürüldüğünde oluşacak katı cismin hacmi kaç br^3 tür?

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = \pi \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$


- 8) Şekildeki taralı alan 5 birim

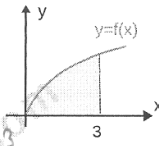
$$\text{kare ve } \int_0^3 (f(x) - 2)^2 dx = 34 \text{ ise}$$

taralı bölgenin x ekseninde 360° döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi kaç birim küptür?

$$\int_0^3 f^2 = 42$$

$$\int_0^3 f^2 - 4f + 4 = 34$$

$$\int_0^3 f^2 - 4 \int_0^3 f + 12 = 34$$

$$\int_0^3 f^2 = 42$$


- 9) İntegral yardımıyla koninin hacmini bulunuz?

$$y = kx \quad kh = r \rightarrow k = r/h \quad y = \frac{r}{h}x$$

$$V = \int_0^h \pi \cdot \frac{r^2 x^2}{h^2} dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$
