

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ ARALIĞININ PARÇALANIŞI VE RİEMANN TOPLAMI

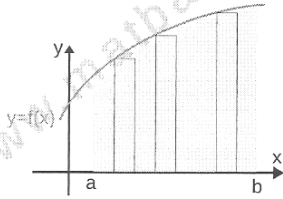
$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu $[a, b]$ kapalı aralığında $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ olmak üzere $n+1$ nokta alalım. Bu $n+1$ noktanın oluşturduğu kümeye, $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b\}$ kümesine $[a, b]$ kapalı aralığının parçalanışı denir.

Bir $[a, b]$ kapalı aralığının herhangi bir P parçalanışında $[x_0, x_1]$ ya birinci alt aralık $[x_1, x_2]$ ya ikinci alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$ ya k . alt aralık denir. Bu aralıkların uzunlukları $x_k - x_{k-1}$ olur ve bu aralıklardan en büyüğüne P parçalanışının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir.

Eğer aralık boylarının hepsi eşit ise parçalanışa düzgün parçalanış denir.

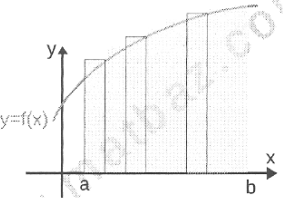
ALT TOPLAM, ÜST TOPLAM VE RİEMANN ALT TOPLAM

$y=f(x)$ fonksiyonunun alt kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına alt toplam denir (A_T). Şekli inceleyiniz



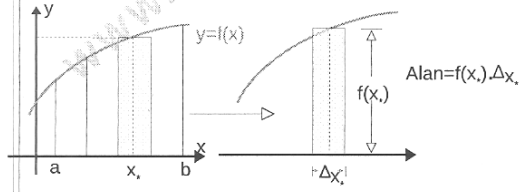
ÜST TOPLAM

$y=f(x)$ fonksiyonunun üst kısmında oluşan n tane dikdörtgenin alanları toplamına üst toplam denir ($Ü_T$). Şekli inceleyiniz



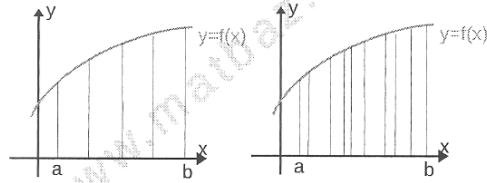
RİEMANN TOPLAMI :

Şimdi her aralıktan bir reel sayı alalım ve k . aralıktan aldığımız bu sayıyı Δx_k ile gösterelim. İşte her alt aralıktan alınan bu x_k sayıları için $f(x_k) \Delta x_k$ sayılarının toplamına, yani $\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ toplamına, Riemann toplamı (R_T) denir.



$$A_T \leq R_T \leq Ü_T$$

Riemann toplamının Δx_k sayıları ve P parçalanışına bağlı olduğu açıktır. Şekilleri inceleyiniz.



$[a, b]$ aralığının P parçalanışındaki aralıklar küçüldükçe, eğri altında kalan dikdörtgenlerin alanlarının toplamının f fonksiyonun grafiği ile x eksenini arasındaki alana yaklaştığını görürüz. Bu nedenle parçalanışın normu olan $\|P\|$ küçüldükçe (başka bir deyişle sıfıra yaklaştıkça) bu parçalanışa ait Riemann toplamının yaklaştığı bir reel sayı değerinin, limitinin, olmasını bekleriz.

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

RIEMANN TOPLAMI OLARAK BELİRLİ İNTEGRALİ

$f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $P[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanışı ve x'_k bu parçalanışa ait $[x_{k-1}, x_k]$ aralığından seçilen herhangi bir reel sayı olsun.

Eğer $\|P\| \rightarrow 0$ için $\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k = L$ olacak

şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa P parçalanışı ve x'_k sayılarının seçiminden bağımsız olarak $f[a,b]$ arasında integrallenebilir ve $L \in \mathbb{R}$ ye $[a,b]$ de f nin belirli integrali denir. (bu aralıkta $y=f(x)$ fonksiyonu eğer negatif olmuyorsa bu limit değeri eğri ile x eksenı arasında kalan alanı verir)

$\|P\| \rightarrow 0$ yerinen $\rightarrow \infty$ aynı şey olarak düşünülebilir. $\Delta x = dx$, $\Delta x \rightarrow 0$

Özetle $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k \right) = L \in \mathbb{R}$ oluyorsa bu limit değerine $y=f(x)$ fonksiyonunun a 'dan b ye belirli integrali der ve bunu $\int_a^b f(x) dx$ olarak yazarız. a ve b sayılarına integralin alt ve üst limitleri denir

Kısaca $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k \right) = L = \int_a^b f(x) dx$

$$\sum_{k=1}^n f(x'_k) \Delta x_k$$

↓ ↓ ↓

$$\int_a^b f(x) dx$$

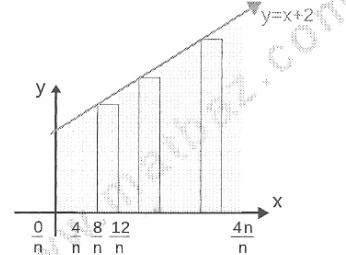
Örnek...1:

$f:[0,4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ fonksiyonu ile $x=0$ doğrusu $x=2$ doğrusu ve x eksenıyle sınırlı bölgenin alanını Riemann toplamıyla bulunuz

Çözüm:

$[0,4]$ aralığının eşit bölünmesiyle her bir aralık $\frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ olarak elde edilir.

Alt toplam



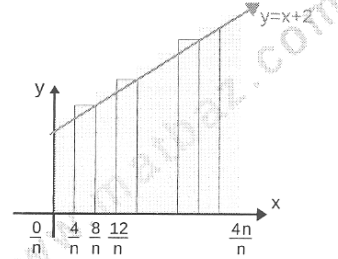
$$\frac{4}{n} \cdot \left(f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + f\left(\frac{8}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{4n-4}{n}\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(\left(\frac{0}{n}+2\right) + \left(\frac{4}{n}+2\right) + \left(\frac{8}{n}+2\right) + \dots + \left(\frac{4n-4}{n}+2\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(2n + \frac{2n-2}{n} \cdot n \right) = \frac{4}{n} \cdot (2n+2n-2) = \frac{4}{n} \cdot (4n-2) = \frac{16n-8}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n-8}{n} \right) = 16$$

Üst toplam



$$\frac{4}{n} \cdot \left(f\left(\frac{4}{n}\right) + f\left(\frac{8}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{4n-4}{n}\right) + f\left(\frac{4n}{n}\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(\left(\frac{4}{n}+2\right) + \left(\frac{8}{n}+2\right) + \dots + \left(\frac{4n}{n}+2\right) \right)$$

$$\frac{4}{n} \cdot \left(2n + \frac{2n+4}{n} \cdot n \right) = \frac{4}{n} \cdot (2n+2n+8) = \frac{4}{n} \cdot (4n+8) = \frac{16n+32}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{16n+32}{n} \right) = 16$$

Ve bu sonuçla birlikte

$$A_T \leq R_T \leq \bar{U}_T$$

$$\text{olduğu için } 16 \leq R_T = \int_0^4 (x+2) dx \leq 16$$

$$\int_0^4 (x+2) dx = 16 \text{ elde edilir (İntegral hesabın}$$

temel teoremi ile belirli integralleri Riemann toplamlarının limiti yerine başka ve daha kısa bir yöntemle hesaplayacağız)

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

BELİRLİ İNTEGRAL KURALLARI

$$1. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$2. \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c < b$$

$$6. (b-a) \cdot \min(f(x)) < \int_a^b f(x) dx < (b-a) \cdot \max(f(x))$$

Örnek...2 :

$$\int_{-1}^{15} f(x) dx = 10, \text{ ve } \int_{-1}^{15} g(x) dx = 8 \text{ ise}$$

$$\left(\int_{-1}^{15} f(x) + g(x) dx \right) \cdot \left(\int_{-1}^{15} f(x) - g(x) dx \right)$$

$$\left[\int_{-1}^{15} f(x) dx + \int_{-1}^{15} g(x) dx \right] \cdot \left[\int_{-1}^{15} f(x) dx - \int_{-1}^{15} g(x) dx \right]$$

$$(10 + 8) \cdot (10 - 8) = 100 - 64 = 36$$

Örnek...3 :

$$\int_2^3 f(x) dx = -3 \text{ ve } \int_3^7 f(x) dx = 5 \text{ ise } \int_2^7 f(x) dx = ?$$

$$\int_2^7 f(x) dx = - \int_7^2 f(x) dx = - \left(\int_2^7 f(x) dx + \int_7^7 f(x) dx \right)$$

$$= -(-3 + 5)$$

$$= -2$$

İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMLERİ: İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ I

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ ise } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \text{ olur.}$$

Yani $\int_a^b f(x) dx$ ifadesini hesaplamak için

Riemann toplamı ile sonuca gitmek yerine $f(x)$ fonksiyonunun ilkel olan $F(x)$ gibi bir fonksiyonda integralin sınırlarını yazar oluşan farkı (F' de üst sınır değerinden alt sınır değerini çıkararak) cevap olarak hesaplarız verir.

Örnek...4 :

$$\int_1^2 x dx = ? \quad \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Örnek...5 :

$$\int_{-1}^3 (x^3 + 5x^2 - 7x + 4) dx = ?$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 4x \Big|_{-1}^3$$

Örnek...6 :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = ? \quad -(\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0)$$

$$= -(0 - 1) = 1$$

Örnek...7 :

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos x dx = ? \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\cos \pi - \cos 0 \right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...8 :

$$\int_0^2 \left(3x^2 + \frac{x}{3}\right) dx = ?$$

$$x^3 + \frac{x^2}{6} \Big|_0^2 = 8 + \frac{4}{6} = \frac{52}{6} = \frac{26}{3}$$

Örnek...9 :

$$\int_{\ln 1}^{\ln 2} (e^{2x} + e^x) dx = ?$$

$$\frac{e^{2x}}{2} + e^x \Big|_{\ln 1}^{\ln 2}$$

$$\frac{e^{2\ln 2}}{2} + e^{\ln 2} - \frac{e^{2\ln 1}}{2} - e^{\ln 1}$$

$$2 + 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{2}$$

Örnek...10 :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$

$$\arctan x \Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$\arctan \sqrt{3} - \arctan 1$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

UYARI

Değişken değiştirme yapıldığında yeni değişkene göre sınırlar tekrar hesaplanırsa eski değişkene dönüşmeden integral hesaplanabilir

Örnek...11 :

$$\int_2^3 (x-2)^2 dx = ?$$

$$u = x-2$$

$$du = dx$$

$$x \rightarrow 2 \quad 3$$

$$u \rightarrow 0 \quad 1$$

$$\int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Örnek...12 :

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = ?$$

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$\begin{array}{ccc} x & 1 & e \\ u & 0 & 1 \end{array}$$

$$\int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Örnek...13 :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \cdot \cos x dx = ?$$

$$u = \sin x$$

$$du = \cos x dx$$

$$\begin{array}{ccc} x & \pi/2 & \pi \\ u & 1 & 0 \end{array}$$

$$\int_1^0 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

Örnek...14 :

$$\int_0^1 (x^2 + 5x + 1)^2 (2x + 5) dx = ?$$

$$u = x^2 + 5x + 1$$

$$du = (2x + 5) dx$$

$$\begin{array}{ccc} x & 0 & 1 \\ u & 1 & 7 \end{array}$$

$$\int_1^7 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_1^7 = \frac{7^3 - 1}{3} = \frac{342}{3}$$

Örnek...15 :

$$\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx = ?$$

$$u = x$$

$$dv = \cos x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \sin x$$

$$x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$x \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Örnek...16 :

$$\int_{10}^{100} \log x dx = ?$$

$$\int_{10}^{100} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{\ln 10} (x \ln x - x) \Big|_{10}^{100}$$

$$\frac{1}{\ln 10} (100 \ln 100 - 100 - 10 \ln 10 + 10)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...17 :

$$\int_{-2}^2 x^5 + x^3 dx = ? \quad \int_{-2}^2 k dx \rightarrow \left. xk \right|_{-2}^2 = 0$$

Örnek...18 :

$$\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1+x^2} = ? \quad \arctan x \Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan 1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

Örnek...19 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx = ?$$

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x dx \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{u} du &= \left. \frac{2}{3} u^{3/2} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Örnek...20 :

$$\int_{-3}^3 \frac{x^{15}}{1+x^4} dx = ? \quad 0 \quad \int_{-2}^2 k dx = 0$$

Örnek...21 :

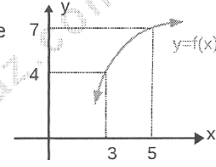
$$\int_0^1 x \ln(x^2+1) dx = ?$$

$$\begin{aligned} u &= x^2+1 \quad du = 2x dx \\ \int_1^2 \frac{\ln u}{2} du &= \frac{1}{2} (u \ln u - u) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} [2 \ln 2 - 2 - (1 \ln 1 - 1)] \\ &= \frac{1}{2} [2 \ln 2 - 1] \end{aligned}$$

Örnek...22 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine

göre $\int_3^5 (f(x) + x \cdot f'(x)) dx = ?$



$$\begin{aligned} \int_3^5 [x \cdot f(x)]' dx &= x \cdot f(x) \Big|_3^5 \\ &= 5 \cdot f(5) - 3 \cdot f(3) \\ &= 5 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 35 - 12 = 23 \end{aligned}$$

Örnek...23 :

$$\int_2^3 f(x) dx = 5 \text{ ise } \int_2^3 (7 - f(x)) dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int_2^3 7 - f(x) dx &= \int_2^3 7 dx - \int_2^3 f(x) dx \\ &= 7x \Big|_2^3 - 5 \\ &= 7 \cdot 3 - 5 = 21 - 5 = 16 \end{aligned}$$

Örnek...24 :

$$\int_0^2 f(4x) dx = 60 \text{ ise } \int_0^8 (1 - f(x)) dx = ?$$

$$\begin{aligned} u &= 4x \Rightarrow du = 4 dx \\ \int_0^8 \frac{f(u) \cdot du}{4} &= 60 \\ \int_0^8 f(u) du &= 240 \\ \int_0^8 (1 - f(x)) dx &= \int_0^8 1 dx - \int_0^8 f(x) dx \\ &= 8x \Big|_0^8 - 240 = 64 - 240 = -176 \end{aligned}$$

Örnek...25 :

$$\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = 3 \text{ ise } \int_1^2 x \cdot f(x^2+1) dx = ?$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx \\ \int_1^2 \frac{f(u)}{u} du &= 3 \\ u &= x^2+1 \quad du = 2x dx \\ \int_2^5 \frac{f(u)}{2} du &= \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...26 :

$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$ integralinde $x=4\sin t$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$x = 4\sin t \quad dx = 4\cos t dt$$

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{16-16\sin^2 t} \cdot 4\cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 4\cos t \cdot 4\cos t dt = 16 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt$$

Örnek...27 :

$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2+e^{2x}} dx$ integralinde $u=e^x$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$u = e^x \quad du = e^x dx$$

$$\int_1^2 \frac{du}{2+u^2}$$

Örnek...28 :

$\int_1^{256} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} dx$ integralinde $x=u^{1/2}$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız ($u>0$)

$$x = u^{1/2} \rightarrow dx = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$\int_1^{256} \left(\frac{u^{1/2}-3}{u^{1/2}} \right) \cdot \frac{1}{2} u^{-1/2} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^{256} \left(\frac{u-3}{u} \right) u^{-1/2} du$$

Örnek...29 :

A(3,2) noktasında yerel maksimum ,B(-2,3) noktasında yerel minimuma sahip $y=f(x)$

fonksiyonu için $\int_{-2}^3 x \cdot f''(x) dx$ değerini bulunuz

$$f(3)=2 \quad f(-2)=3 \quad f'(3)=f'(-2)=0$$

$$\int_{-2}^3 x f''(x) dx = ?$$

$$u = x \quad du = dx$$

$$v = f'(x) \quad dv = f''(x) dx$$

$$x f'(x) - \int f'(x) dx$$

$$x f'(x) - f(x) \Big|_{-2}^3 = 3f'(3) - f(3) + 2f'(-2) - f(-2)$$

$$= 0 - 2 + 3 = 1$$

Örnek...30 :

$y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda türevli ve $x=2$ noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45° lik açı yapıyorsa ve $x=3$ ekstremum noktalarından birinin apisi ise

$$\int_2^3 \frac{x \cdot f''(x) - f'(x)}{x^2} dx = ?$$

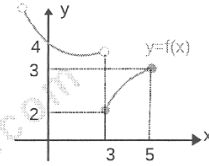
$$f'(2)=1 \quad f'(3)=0$$

$$\int_2^3 \left(\frac{f'(x)}{x} \right)' dx = \frac{f'(x)}{x} \Big|_2^3 = \frac{f'(3)}{3} - \frac{f'(2)}{2}$$

$$= 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Örnek...31 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği şekildeki gibidir



$$\int_3^5 f(x) + x \cdot f'(x) dx = ?$$

$$\int_3^5 [x \cdot f(x)]' dx$$

$$x f(x) \Big|_3^5 = 5 f(5) - 3 f(3)$$

$$= 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = 4$$

Örnek...32 :

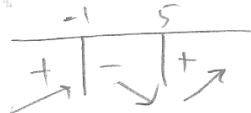
$\int_0^1 (x^2 - 4x - 5) dx$ integralinin alacağı sonuç en az kaçtır?

$$\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x \Big|_0^1$$

$$f(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 - 5t$$

$$f'(t) = t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t+1)(t-5) = 0 \quad t = -1 \quad t = 5$$



$$t=5 \text{ için minimum}$$

$$\frac{5^3}{3} - 2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 = \frac{125}{3} - 50 - 25 = \frac{125}{3} - 75 = \frac{125 - 225}{3} = -\frac{100}{3}$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN İNTEGRALI

İntegrandında parçalı fonksiyon veya mutlak değerli fonksiyon içeren integraller integralin alındığı sınırlar içerisinde kritik nokta içeriyorsa göre parçalanarak integralleri alınır.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığındaki bulunan sonlu sayıdaki $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları için süreksiz ise bu noktalara göre integral parçalanır.

$$\text{Yani } \int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x) dx$$

Bu parçalamayı genelde parçalı fonksiyonda veya mutlak değerli fonksiyonun kritik noktasında ihtiyaç duyarsak yaparız

Örnek...33 :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-4}^{-2} f(x) dx$$

$$\int_{-4}^{-2} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-4}^{-2} = \frac{4 - 16}{2} = -\frac{6}{2}$$

Örnek...34 :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ x^3 & 2 < x < 3 \\ x+1 & x \geq 3 \end{cases} \text{ fonksiyonu için } \int_0^5 f(x) dx$$

$$\int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 x^3 dx + \int_3^5 (x+1) dx$$

$$\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_3^5$$

$$\frac{8}{3} + \frac{65}{4} + 10 =$$

Örnek...35 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ 3x^2 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$\int_{-1}^0 3x^2 dx + \int_0^3 (2x+1) dx$$

Örnek...36 :

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \text{ ise } \int_{-3}^1 f(x+2) dx$$

$$f(x+2) = \begin{cases} 2^{x+2} & x+2 \geq 0 \\ x+2+1 & x+2 < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2^{x+2} & x \geq -2 \\ x+3 & x < -2 \end{matrix}$$

$$\int_{-3}^{-2} (x+3) dx + \int_{-2}^1 2^{x+2} dx$$

Örnek...37 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} & x \geq e \\ e^x & x < e \end{cases} \text{ ise } \int_1^e f(x) dx$$

$$\int_1^e e^x dx + \int_e^e \frac{\ln x}{x} dx$$

Örnek...38 :

$$\int_1^5 |x+2| dx = \int_1^5 (x+2) dx$$

Örnek...39 :

$$\int_1^3 x^3 |x-2| dx = \int_1^2 (-x^4 + 2x^3) dx + \int_2^3 (x^4 - 2x^3) dx$$

Örnek...40 :

$$\int_1^3 x^3 |x-2| dx$$

Örnek...41 :

$$\int_0^{\pi} |\cos x| dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx$$

Örnek...42 :

$$\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x| dx$$

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$$

Örnek...43 :

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} dx \rightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}} = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$

$$\pi < x < 2\pi$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \pi$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} -\cos \frac{x}{2} dx$$

Örnek...44 :

$$\int_0^1 \frac{x^2-4}{|x-2|} dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2-4}{2-x} = \int_0^1 -(x+2) dx$$

Örnek...45 :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} (|\sin x| + \cos |x|) dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} |\sin x| + \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos |x|$$

$$\int_{-\pi/2}^0 -\sin x + \int_0^{\pi} \sin x + \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos x$$

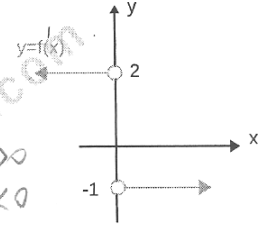
Örnek...46 :

$$\int_0^{\pi/2} \left| \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \right) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dx$$

Örnek...47 :

Reel sayılarda sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği veriliyor. f(3)-f(2)=?



$$f'(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x + c & x > 0 \\ 2x + d & x < 0 \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow c=d$$

$$f(3)-f(2) = (-3+c) - (-4+d) = 1$$

İNTEGRAL HESABIN TEMEL TEOREMİ II

f: [a,b] → R sürekli bir fonksiyon ve

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ ise } \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

yani sürekli her fonksiyon başka bir fonksiyonun türevidir. Başka bir deyişle türev ve integral işlemleri birbirlerinin tersi işlemlerdir.

Örnek...48 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \sin t dt \right) = ?$$

$$\sin x$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

Örnek...49 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{-2}^x \frac{1}{t^2+1} dt \right) = ? \quad \frac{1}{x^2+1}$$

Örnek...50 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sqrt{7}}^x \tan t dt \right) = ? \quad \tan x$$

GENELLEME (LEİBNİZ KURALI)

$$F(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \text{ olarak verilsin}$$

$$\frac{d[F(x)]}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt \right) = f(u(x)) \cdot u'(x) - f(v(x)) \cdot v'(x)$$

Örnek...51 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\sin x}^{\cos x} t^2 + t dt \right) = ?$$

$$(0)x + (0)x \cdot (-\cos x) - (\sin^2 x + \sin x) \cdot \cos x$$

Örnek...52 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \tan t dt \right) = ?$$

$$\tan x^2 \cdot 2x - \tan x$$

Örnek...53 :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos t dt}{\ln|x-1|} \right) = \frac{0}{0} \quad \text{L'Hopital}$$

$$\frac{-\cos \frac{\pi}{x} \cdot \frac{-\pi}{x^2}}{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

Örnek...54 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\ln 2}^{x^2} d(e^t) \right) = ? \quad \frac{d}{dx} \int_{\ln 2}^{x^2} e^t dt = e^{x^2} \cdot 2x$$

Örnek...55 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int_e^{\frac{1}{e}} \frac{\sin t}{t} dt \right) = ? \quad 0 \quad (\text{sabit})$$

Örnek...56 :

$F(x) = \int_{x+1}^{x^2+1} e^t dt$ fonksiyonun $x=1$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz

$$m_t = F'(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x - e^{x+1} \quad | x=1$$

$$F'(1) = 2e^2 - e^2 = e^2 = m_t$$

$$x=1 \Rightarrow F(1) = \int_2^2 e^t dt = 0 \rightarrow (1,0) \text{ dan geçer,}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = e^2(x - 1) \\ y = e^2x - e^2$$

Örnek...57 :

$F(x) = \int_{x+2}^{x^2} t^2 dt$ fonksiyonun x dönüm noktasının apsisini bulunuz

$$F'(x) = x^2 \cdot 2x - (x+2)$$

$$F'(x) = 6x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Örnek...58 :

$F(x) = \int_0^x t \cdot e^t dt$ ise $F'(1)$ kaçtır?

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

$$F'(1) = e$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

DEĞERLENDİRME

1) $\int_2^3 f(x)dx=10$ ve $\int_2^3 g(x)dx=8$ ise
 $\left(\int_2^3 (4f(x)+3g(x))dx\right) - \left(\int_2^3 (5f(x)-4g(x))dx\right)$
 $(4 \cdot 10 + 3 \cdot 8) - (5 \cdot 10 - 4 \cdot 8)$
 $(64) - (18) = \underline{\underline{46}}$

2) $\int_1^2 f(x)dx=6$ ve $\int_1^2 (5-3f(x))dx=?$
 $\downarrow$
 $\int_1^2 5dx - 3\int_1^2 f(x)dx$
 $5x \Big|_1^2$
 $5 - 3 \cdot 6 = \underline{\underline{-13}}$

3) $\int_1^2 \left(\sum_{n=0}^2 \frac{x^n}{n!}\right)dx=?$
 $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2}$
 $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \Big|_1^2$
 $2 + 2 + \frac{8}{6} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$
 $3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$

4) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}dx=?$ $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$
 $A(x+2) + B(x-2) = 4$
 $x=2 \Rightarrow A=1$
 $x=-2 \Rightarrow B=-1$
 $\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x-2| - \ln|x+2|$
 $= \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \Big|_0^1$
 $\ln \frac{1}{3} - \ln 1 = \underline{\underline{-\ln 3}}$

5) $\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{1+x^2}dx=?$ $\arctan x \Big|_{\sqrt{3}}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$
 $= \underline{\underline{-\frac{\pi}{12}}}$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos x dx=?$ $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

x	0	$\pi/4$
u	1	$1/\sqrt{2}$

 $\int_1^{1/\sqrt{2}} -2u^2 du = -\frac{2u^3}{3} \Big|_1^{1/\sqrt{2}} = +\frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 1 \right]$

7) $\int_1^2 (3x^2+3^x)dx=?$
 $x^3 + \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^2 = \frac{8+9}{\ln 3} - 1 - \frac{3}{\ln 3}$
 $= 7 + \frac{6}{\ln 3}$

8) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{-x} dx=?$ $\frac{e^{-x}}{-1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 4}$
 $-e^{-\ln 4} + e^{-\ln 2}$
 $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{1/4}}$

9) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx=?$ $\arcsin x \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2}$
 $\arcsin \sqrt{3}/2 - \arcsin 1/2$
 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

10) $\int_{-3}^{-4} \frac{1}{(x+5)^4} dx = ?$ $u = x+5$ x -3 -4
 $du = dx$ u 2 1

$$\int_2^1 u^{-4} du = \frac{u^{-3}}{-3} \Big|_2^1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{8} \right)$$

$$= -\frac{7}{24}$$

11) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln^2 x} dx = ?$ $u = \ln x$ x 1 2
 $du = \frac{1}{x} dx$ u 0 $\ln 2$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{du}{u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} \Big|_0^{\ln 2} = -\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{0} \right)$$

yanlış!

12) $\int_3^{19} \frac{x+3}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6}} dx = ?$ $u = x^2 + 6x$ x 3 19
 $du = (2x+6) dx$ u 27 475

$$\int \frac{du/2}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \frac{u^{1/2}}{1/2} = \sqrt{u} \Big|_{27}^{475}$$

$$\sqrt{475} - \sqrt{27} = 5\sqrt{19} - 3\sqrt{3}$$

13) $\int_0^{\pi/4} x \cdot \sin x dx = ?$ $u = x$ $du = \sin x dx$
 $du = dx$ $v = -\cos x$

$$-x \cos x = \int -\cos x dx$$

$$-x \cos x + \sin x \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0$$

$$= \frac{-\pi + 4}{4\sqrt{2}} = \frac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$$

14) $\int_1^e \ln x dx = ?$ $u = \ln x$ $du = dx$
 $du = \frac{1}{x} dx$ $v = x$

$$x \ln x - \int dx = x \ln x - x \Big|_1^e$$

$$(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$0 - (-1) = 1$$

15) $\int_{-2}^2 (x^{15} + x^{7 \cos x} + \sin^9 x) dx = ?$ $\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$

16) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x \cdot (1 - \sin^2 x)}{\sqrt{\sin x}} dx = ?$ x $\pi/6$ $\pi/2$
 $u = \sin x$ u $1/2$ 1
 $du = \cos x dx$

$$\int_{1/2}^1 \frac{du \cdot (1-u^2)}{\sqrt{u}} = \int_{1/2}^1 (u^{-1/2} - u^{3/2}) du$$

$$\frac{u^{1/2}}{1/2} - \frac{u^{5/2}}{5/2} \Big|_{1/2}^1 = \frac{8}{5} - \frac{19\sqrt{2}}{20}$$

17) $\int_0^{12} f\left(\frac{x}{3}\right) dx = 36$ ise $\int_0^2 (x+3-4 \cdot f(2x)) dx = ?$

$$u = \frac{x}{3} \quad du = \frac{1}{3} dx$$

$$\int_0^4 f(u) \cdot 3 du = 36$$

$$\int_0^4 f(u) du = 12$$

$$\frac{x^2}{2} + 3x \Big|_0^2 - 4 \int_0^2 f(2x) dx$$

$$8 - 4 \cdot \int_0^4 f(u) \frac{du}{2}$$

$$8 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 8 - 24 = -16$$

18) $\int_1^4 f(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 3$ ise $\int_{\sqrt{2}}^2 5x \cdot f\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = ?$

$$u = \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^2 f(u) \cdot 2 du = 3$$

$$\int_1^2 f(u) du = 3/2$$

$$u = \frac{x^2}{2} \quad du = x dx$$

$$\int_1^2 5 du \cdot f(u) = ?$$

$$5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

19) $\int_0^3 (\sqrt{9-x^2}) dx$ integralinde $x=3 \sin a$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$x = 3 \sin a$	$dx = 3 \cos a da$	x	0	3
		a	0	$\pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{9-9\sin^2 a} \cdot 3 \cos a da$$

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cos a \cdot 3 \cos a da = 9 \int_0^{\pi/2} \cos^2 a da$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

- 20) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{2+e^{2x}} dx$ integralinde $u=e^x$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$u=e^x \quad du=e^x dx \quad \begin{array}{ccc} x & 0 & \ln 2 \\ u & 1 & 2 \end{array}$$

$$\int_1^2 \frac{du}{2+u^2}$$

- 21) $\int_1^{64} \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$ integralinde $x=u^6$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$x=u^6 \quad dx=6u^5 du \quad \begin{array}{ccc} x & 1 & 64 \\ u & 1 & 2 \end{array}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{u^3-u^6}{u^2} \right) \cdot 6u^5 du = 6 \int_1^2 (u^6-u^9) du$$

- 22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot(x+\pi)}{1+\tan(x-\pi)} dx = ?$ integralinde $x=t+\frac{\pi}{2}$ dönüşümü yaparak tekrar integrali yazınız

$$\frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{1+\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\tanh t}{1-\coth t} \quad dx=dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{-\tanh t}{1-\coth t} \right) dt \quad \begin{array}{ccc} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ t & -\frac{\pi}{2} & 0 \end{array}$$

- 23) $y=f(x)$ fonksiyonu reel sayılarda türevli ve $x=1$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel ve $x=5$ deki teğeti $y-3x+2=0$ doğrusuna dikse $=?$

$$\int_1^5 \frac{f''(x)}{x} dx + \int_5^1 \frac{f'(x)}{x^2} dx \quad \begin{array}{l} f'(1)=0 \\ f'(5)=3 \end{array}$$

$$\int_1^5 \left(\frac{f''(x)}{x} - \frac{f'(x)}{x^2} \right) dx = \int_1^5 \left(\frac{f'(x)}{x} \right)' dx$$

$$\frac{f'(5)}{5} - \frac{f'(1)}{1} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$$

- 24) $y=f(x)$ fonksiyonu n grafiği

şekildeki gibidir

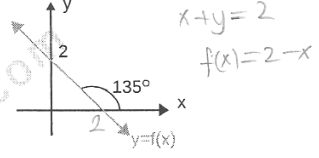
$\int_3^5 f(x) + x \cdot f'(x) dx$ integralinin değerini bulunuz

$$\int_3^5 [x f(x)]' dx = x f(x) \Big|_3^5 = 5 f(5) - 3 f(3)$$

$$= 5 \cdot (-3) - 3 \cdot (-1)$$

$$= -15 + 3$$

$$= -12$$



- 25) $\int_0^a (2x^2-6x) dx$ integralinin alacağı sayısal sonuç en az kaçtır?

$$\frac{2}{3} x^3 - \frac{6x^2}{2} \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3} - 3a^2$$

$$f'(a) = 2a^2 - 6a = 2a(2-a)$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 3 \\ + \quad - \quad + \end{array} \quad a=3 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3^3}{3} - 3 \cdot 3^2$$

$$= 18 - 27 = -9$$

- 26) $f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 1 \\ x & 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 & x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_0^4 f(x) dx$

$$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx + \int_1^3 x dx + \int_3^4 (x-1) dx$$

$$\frac{x^2}{2} + x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + \frac{x^2}{2} - x \Big|_3^4$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 4 + \frac{5}{2} = 8$$

- 27) $f(x) = \begin{cases} 1+2x & x \geq 4 \\ 3x & x < 4 \end{cases}$ fonksiyonu için $\int_{-1}^3 f(x+3) dx$

$$\int_{-1}^3 f(u) du \quad \begin{array}{ccc} u & -1 & 3 \\ u & 2 & 6 \end{array}$$

$$\int_{-1}^3 3u du + \int_4^6 (1+2u) du = \frac{3u^2}{2} \Big|_{-1}^3 + \left(u + u^2 \right) \Big|_4^6 = 40$$

- 28) $\int_1^4 |x-2| dx$

$$\int_1^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx$$

$$-\frac{x^2}{2} + 2x \Big|_1^2 + \frac{x^2}{2} - 2x \Big|_2^4$$

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

İNTEGRAL-6

BELİRLİ İNTEGRAL

$$29) \int_{-1}^3 x|x-2|dx \quad \int_{-1}^2 (-x^2+2x)dx + \int_2^3 (x^2-2x)dx$$

$$\left. -\frac{x^3}{3} + x^2 \right|_{-1}^2 + \left. \frac{x^3}{3} - x^2 \right|_2^3$$

$$30) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x$$

$$-(\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + (\cos x) \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$-(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2}) + (\cos \frac{3\pi}{2} - \cos \pi)$$

$$+1 + (-1) = 2$$

$$31) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 x} dx$$

$$\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -\sin x$$

$$32) \frac{d}{dx} \int_a^{x^2+1} \tan t dt = \tan(x^2+1) \cdot 2x$$

$$33) f(x) = \int_{\sqrt{x-2}}^x (t^2+1) dt \text{ veriliyor. } f \text{ fonksiyonunun}$$

dönüm noktasının apsisi nedir?

$$f'(x) = x^2+1$$

$$f''(x) = 2x = 0 \rightarrow x=0$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{x}} \sin t dt}{e^{x-2}-1}$$

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)}{e^0} = \frac{-\pi/4}{1} = -\pi/4$$

$$35) \frac{d}{dx} \int_1^x d(\ln t) \quad \frac{d}{dx} \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$36) A(1,2) \text{ noktasında teğeti } y \text{ eksenine dik}$$

,B(4,7) noktasında yerel ekstremuma sahip

$y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_1^4 x \cdot f''(x) dx$ değerini

bulunuz

$$f'(1)=0 \quad f(1)=2 \quad f'(4)=0 \quad f(4)=7$$

$$u=x \quad dv=f''(x) \quad x \cdot f'(x) - \int f'(x) dx$$

$$du=dx \quad v=f'(x)$$

$$x \cdot f'(x) - f(x) \Big|_1^4 = [4 \cdot f'(4) - f(4)] - [\underbrace{f'(1)}_0 - f(1)]$$

$$-7 + 2 = -5$$

$$37) [-2,4] \text{ aralığı } \Delta x = \frac{6}{n} \text{ olacak şekilde } n \text{ tane}$$

aralığa bölünüyor. x_k ' k . aralığın orta noktası

olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (3(x_k')^2 - 2x_k') \cdot \Delta x \right)$ limitini

integralle ifade ediniz.

$$\int_{-2}^4 (3x^2 - 2x) dx$$