

İNTEGRAL-5

TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ İNTEGRALI

SİNÜS VE KOSİNÜS TÜRÜNDEN POLİNOMLARIN İNTEGRALLERİ

DURUM 1 :

m ve n den en az biri tekse, tek kuvvet olan terim parçalanır ve diğer ifade u seçilerek değişken değiştirilir. Sıklıkla $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliği kullanılır

Örneğin $\int \sin^3 x \cdot \cos^8 x dx$ ifadesinde tek olan $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$ olarak parçalanır ve $\int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^8 x dx$ olarak yazılır.

Burada $u = \cos x$ seçilir ve $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ özdeşliğiyle beraber $\int \sin^2 x \cdot \cos^8 x \sin x dx = \int (1 - u^2) u^8 du$ integraline dönüştürülür ve devam edilir. Eğer iki kuvvet te tekse küçük olan parçalanır

Örnek...1 :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2) u^2 (-du) \\ &= \int (u^2 - u^4) du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

Örnek...2 :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^{10} x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^{10} x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^{10} x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2) u^{10} (-du) \\ &= \int (u^{10} - u^{12}) du \\ &= \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^{13}}{13} + C \\ &= \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + C \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^7 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^3 \cdot \cos x dx \\ &= \int (1 - u^2)^3 (-du) \\ &= \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\ &= \frac{u}{1} - \frac{3u^3}{3} + \frac{3u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C \\ &= \frac{\sin x}{1} - \frac{3\sin^3 x}{3} + \frac{3\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C \end{aligned}$$

Örnek...4 :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx \\ &= \int (1 - u^2) u^2 (-du) \\ &= \int (u^2 - u^4) du \\ &= \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C \\ &= \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C \end{aligned}$$

DURUM 2 :

Derece olarak sadece çift kuvvetler varsa kosinüsün yarım açı formüllerini kullanarak derece düşürülür. Hatırlatma : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Örnek...5 :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

İNTEGRAL-5

TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Örnek...6 :

$$\int \cos^2 x dx$$

$$\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\int \frac{\cos 2x + 1}{2} dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + x \right) + C$$

Örnek...7 :

$$\int \cos^4 x dx$$

$$(\cos^2 x)^2 = \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \int (\cos^2 2x + 2\cos 2x + 1) dx$$

$$\frac{1}{4} \cdot \int \left[\frac{\cos 4x + 1}{2} + 2\cos 2x + 1 \right] dx$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 4x}{4} + x \right) + 2 \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) + x \right] + C$$

DURUM 3

Bazen ters dönüşüm bağıntıları da kullanılabilir.

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) - \sin(x+y))$$

Örnek...8 :

$$\int \cos 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} \int [\sin(-2x) - \sin 4x] dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 2x}{-2} + \frac{\cos 4x}{-4} \right)$$

$$= \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 4x}{8} + C$$

Örnek...9 :

$$\int \cos 4x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

Örnek...10 :

$$\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 8x}{8} \right) + C$$

DEĞERLENDİRME

1) $\int \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$ $u = \cos x \quad du = -\sin x \, dx$

$$-\frac{u^4}{4} + C = -\frac{(\cos x)^4}{4} + C$$

2) $\int \cos^3 x \cdot \sin^4 x \, dx$ $u = \sin x \quad du = \cos x \, dx$

$$\int (u^4 - u^6) \, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

3) $\int \cos 3x \cdot \sin 3x \, dx$

$$\int \frac{\sin 6x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos 6x}{-6} \right) + C$$

$$= -\frac{\cos 6x}{12} + C$$

4) $\int \sin^2 x \cdot \sin 2x \, dx$ $u = \sin x \quad du = \cos x \, dx$

$$\int 2u^3 \, du = \frac{2u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{2} + C$$

5) $\int \cos 6x \cdot \cos 4x \, dx$

$$\frac{1}{2} \int (\cos 10x + \cos 2x) \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 10x}{10} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

6) $\int \cos 3x \cdot \sin 5x \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin 2x - \sin 8x) \, dx$

$$\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 8x}{8} \right) + C$$

$$= -\frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 8x}{16} + C$$

7) $\int \sin^4 x \, dx$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$$\int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx$$

$$\int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{2} \, dx$$

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$$

$$\frac{\cos 4x + 1}{2} = \cos^2 2x$$

$$\frac{1}{2} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2} \right) \, dx$$

$$\frac{1}{2} \left(x - 2\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 4x}{4} + x \right) \right) + C$$

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{x}{4} + C$$

$$\frac{3x}{4} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{16} + C$$