

## İNTEGRAL-4

### BASİT KESİRLER

#### RASYONEL İNTEGRALLER VE BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

##### HATIRLATMA:

$P(x)$  ve  $Q(x)$  birer polinom olmak üzere  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  ifadesine rasyonel ifade deriz. İntegrandında  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  gibi ifadeler içeren integrallerde

1.  $\text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)]$  ise pay paydaya bölünür ve bilinen yöntemler denenir

Örnek...1:

$$\int \frac{x^2+3x+5}{x} dx = \int \left(x+3+\frac{5}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 5\ln|x| + C$$

Örnek...2:

$$\int \frac{x^2+5}{x-2} dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \left(x+2+\frac{9}{x-2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 9\ln|x-2| + C$$

Örnek...3:

$$\int \frac{2x^3+3}{x^2+1} dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \left(2x + \frac{-2x+3}{x^2+1}\right) dx$$

$$= x^2 + \left(-\ln|x^2+1|\right) + 3\arctan x + C$$

$$= x^2 - \ln(x^2+1) + 3\arctan x + C$$

2.  $\text{der}[P(x)] < \text{der}[Q(x)]$  ve bilinen yöntemler ile integral alınamıyorsa  $Q(x)$  polinomu çarpanlarına ayrılır ve ifade basit kesirlerine ayrılır.

#### BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

Adım 1  $(x-r)$  çarpanı  $Q(x)$  in birinci derece bir çarpanı ve  $(x-r)^n$   $Q(x)$  in en büyük kuvvetli çarpanı ise bu çarpana  $n$  tane basit kesir ayrılır. Yani

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \frac{A_3}{(x-r)^3} + \dots + \frac{A_n}{(x-r)^n}$$

Bu işlemi her lineer çarpan için tekrarlarız.

Adım 2  $(x^2+px+r)$   $Q(x)$  in ikinci dereceden bir çarpanı ( $\Delta < 0$ ) ve  $(x^2+px+r)^n$   $Q(x)$  in en büyük kuvvetli çarpanı ise bu çarpana  $n$  tane basit kesir ayrılır. Yani

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+r} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+r)^2} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+r)^n}$$

Bu işlemi her ikinci derece çarpan için tekrarlarız.

Adım 3  $f(x)$  bu basit kesirlerin toplamına eşitlenir.

Adım 4 Polinomların eşitliği kullanılarak bilinmeyenler bulunur.

Örnek...4:

Bazı ifadeler basit kesirlerine ayrılmıştır. İnceleyiniz

- 1)  $\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$
- 2)  $\frac{1}{(x^2-25)(x+2)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x+2}$
- 3)  $\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$
- 4)  $\frac{1}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$
- 5)  $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$

### Örnek 5

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

$$\int \left( \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} \right) dx$$

$$\frac{1}{3} \left[ \ln|x-1| - \ln|x+2| \right] \rightarrow \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + c$$

Örnek 4.6 : \*

$$\int \frac{12}{x^2-9} dx \quad \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$$

$$\int \left( \frac{2}{x-3} + \frac{-2}{x+3} \right) dx \quad \begin{aligned} A(x+3) + B(x-3) &= 12 \\ A=2, B &= -2 \end{aligned}$$

$$2 \left( \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \right) + C$$

Örnek 7

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

$$Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = 1$$

$$A=1 \quad B=-1 \quad C=0$$

$$\int \left( \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} \right) dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c$$

Örnek. 8 :

$$\int \frac{20}{x(x-1)^2} dx$$

Örnek 9

$$\int \frac{x^3}{x-1} dx$$

$$\int x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$$

## DEĞERLENDİRME

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{x^3-8} &= \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} = \frac{dx}{x^3-8} \\ \frac{1}{12} \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{x+4}{x^2+2x+4} \right) dx & \quad \begin{matrix} A = 1/12 \\ B = -1/12 \end{matrix} \\ 2) \int \frac{x^3-4x+1}{x^2+4} dx &= \frac{1}{12} \left( \ln|x-2| - \right. \end{aligned}$$

[illegible]

3)  $\int \frac{3x+1}{x^2-4} dx$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{3x+1}{x^2-4}$$
$$A = 7/4$$
$$B = -5/4$$

$$\frac{7}{4} \int \frac{1}{x-2} + \frac{5}{4} \int \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{7}{4} \ln|x-2| + \frac{5}{4} \ln|x+2| + C$$

$$4) \int \frac{6x+7}{(x-1)^2} dx \quad \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{6x+7}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{6}{x-1} + \frac{13}{(x-1)^2} = 6 \ln|x-1| + \frac{13}{1-x} + C \quad B=13 \quad A=6$$

5)  $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} dx$   $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} + \frac{C}{x-2} = \frac{x+4}{x^2+3x-10x}$   
 $\frac{x(x^2+3x-10)}{x(x+5)(x-2)}$   $C = 3/7$   
 $\int \frac{-2/5}{x} + \frac{-1/35}{x+5} + \frac{3/7}{x-2} = -\frac{2}{5} \ln|x| - \frac{1}{35} \ln|x+5| + \frac{3}{7} \ln|x-2| + C$   
 $A = -2/5$   
 $B = -1/35$

6)  $\int \frac{dx}{x^3+16x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{1}{x^2+4}$   
 $x(x^2+4)$

$$\begin{aligned} \text{6) } \int \frac{dx}{x^3+16x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+16} = \frac{1}{x^3+16x} \\ \int \frac{1/16}{x} + \frac{-x/16}{x^2+16} & \quad A = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{32} \ln(x^2+16) + C & \quad B = -1/16 \\ C &= 0 \end{aligned}$$