BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ (II)
PARÇALI İNTEGRAL

Örneği inceleyiniz
$\int x dx = x^2/2$ ve $\int x^2 dx = x^3/3 \neq \int x dx . \int x dx$.
Yani genel olarak
$\int f(x).g(x)dx \neq \int f(x)dx . \int g(x)dx$

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $(f.g)' = f'g + g'f$ L bağıntısını çarpma kuralından hatırlıyoruz. Burada her iki tarafın integrali alınırsa
$\int (f(x).g(x))'dx = \int f(x)'g(x)dx + \int g'(x).f(x)dx$ ve burada sağdaki eşitliklerden biri yalnız bırakılırsa
$\int g'(x).f(x)dx = \int (f(x).g(x))'dx - \int f(x)'g(x)dx$
$\int g'(x).f(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x)'g(x)dx$
olur.
Eğer bunu parçalı integrallerin aşılagelindiği tarzında gösterirsek bu yöntemde u ve v x türünden fonksiyonlar olmak üzere
$(u.v)' = u'.v + v.u'$ kuralı tersine işletilerek
$\int u.dv = u.v - \int v.du$ olarak hesaplanır

Burada yapılan şudur: bize verilen $\int u.dv$ integralini hesaplamak yerine bunun eşdeğeri olan $u.v - \int v.du$ ifadesini hesaplarız.
Özetle

Adım1 u ve dv seçilir.

Adım2 u için türevle du ; dv için integralle v bulunur

Adım3 u,v,du ile dv ifadedeleri $u.v - \int v.du$ bağıntısında yerine yazılıralak integral alınır.

Kısmi İntegrallerde u ve dv seçimi önemlidir. Hatırda kalması açısından u seçimi LAPTÜ kelimesinin harflerine göredir.

L logaritma	$\log_2 x$, $\ln x$	
A Arc	arcsinx, arctan3x	
P polinom	x, x^2+3x	
T Trigonometrik	sinx, cotx	
Ü Üstel	2^x, e^{2x}	

w w w . m a t b a z . c o m

Örnek...1 : LAPTÜ

$\int x.\sin x\, dx$

$u = x \quad dv = \sin x\, dx$

$du = dx \quad v = -\cos x$

$u.v - \int v\, du = x.(-\cos x) - \int -\cos x\, dx$ $+ \int \cos x\, dx$

$-x\cos x + \sin x + c$

Örnek...2 :

$\int x.\cos x\, dx$

$u = x \quad dv = \cos x\, dx$

$du = dx \quad v = \sin x$

$uv - \int v\, du = x\sin x - \int \sin x\, dx$

$= x\sin x + \cos x + c$

Örnek...3 :

$\int x.e^x dx$

$u = x \quad dv = e^x dx$

$du = dx \quad v = e^x$

$uv - \int v.du = x.e^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x + c$

Örnek...4 :

$\int \ln x\, dx = ?$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$

$uv - \int v\, du = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

Örnek...5 :

$\int \arctan x \, dx$ $u = \arctan x$ $dv = dx$

$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ $v = x$

$uv - \int v\,du = x \arctan x - \int \dfrac{x}{1+x^2} dx$

$x . \arctan x - \dfrac{1}{2} \arctan x + c$

Örnek...6 :

$\int e^x . \sin x \, dx$ $u = \sin x$ $dv = e^x dx$

$du = \cos x\,dx$ $v = e^x$

$\int e^x \sin x\,dx = \sin x . e^x - \int e^x \cos x\,dx$

$u_1 = \cos x$ $dv_1 = e^x dx$

$du_1 = -\sin x\,dx$ $v_1 = e^x$

$\int e^x \sin x\,dx = e^x . \sin x - \left(\cos x . e^x + \int e^x \sin x\,dx \right)$

$2 \int e^x \sin x\,dx = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow \int e^x \sin x\,dx = \dfrac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$

İntegral Tablosu Yöntemi

$\int u.dv$ kısmi integralinde u'nun ardışık sonlu mertebeden türevi sıfır oluyor ve

v' nin integralleri de kolaylıkla bulunabiliyorsa bu integralin sonucu u'nun ardışık türevleri ile v'nin ardışık integralleri +, —, + —, işaretlendirilip çarpılarak elde edilir. (İntegral tablosu)

Örneği inceleyiniz 0 $\int x^2 . e^x dx$

TÜREV ↓ u		İNTEGRAL ↓ dv
x^2	+	e^x
$2x$	-	e^x
2	+	e^x
0	-	e^x
		e^x

Buradan

$\int x^2 . e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

Örnek...7 :

$\int x . e^x dx$ $u = x$ $dv = e^x dx$

u		dv
x	+	$e^x dx$
1	−	e^x
0		e^x

$x . e^x - e^x + c$

Örnek...8 :

$\int x^2 . 7^x dx$

u		dv
$u = x^2$	+	$7^x = dv$
$2x$	−	$7^x / \ln 7$
2		$7^x / (\ln 7)^2$
0		$7^x / (\ln 7)^3$

$x^2 . \dfrac{7^x}{\ln 7} - 2x . \dfrac{7^x}{(\ln 7)^2} + 2 . \dfrac{7^x}{(\ln 7)^3} + c$

Örnek...9 :

$\int x^2 . e^{-x} dx$

u		dv
$u = x^2$	+	$dv = e^{-x} dx$
$2x$	−	$-e^{-x}$
2	+	e^{-x}
0		$-e^{-x}$

$-x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2 e^{-x} + c$

Örnek...10 :

$\int \left(\dfrac{x}{\cos^2 x} \right) dx$

u		dv
$u = x$	+	$dx / \cos^2 x$
1	−	$\tan x$
0		$-\ln \lvert \cos x \rvert$

$x \tan x + \ln \cos x + c$

www.matbaz.com

DEĞERLENDİRME

1) $\int \arcsin x \, dx$

$u = \arcsin x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = x$

$uv - \int v \, du$

$x.\arcsin x - \int \dfrac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad u = 1 - x^2, \quad du = -2x dx, \quad \int \dfrac{-du/2}{\sqrt{u}}$

$= x \arcsin x + \dfrac{1}{2} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1/2} + c$

$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$

2) $\int \log x \, dx$

$u = \log x \qquad dv = dx$

$du = \dfrac{1}{\ln 10} \dfrac{dx}{x} \qquad v = x$

$uv - \int v . du$

$x \log x - \int x . \dfrac{1}{\ln 10} . \dfrac{dx}{\cancel{x}}$

$x \log x - \dfrac{1}{\ln 10} + c$

3) $\int x . \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x dx$

$du = \dfrac{1}{x} dx \qquad v = \dfrac{x^2}{2}$

$uv - \int v du$

$\dfrac{x^2}{2} . \ln x - \int \dfrac{x^2}{2} . \dfrac{dx}{x}$

$\dfrac{x^2}{2} \ln x - \dfrac{x^2}{4} + c$

4) $\int \left(\dfrac{x}{\sin^2 x} \right) dx$

$u = x \qquad dv = \dfrac{1}{\sin^2 x} dx$

$1 \qquad -\cot x$

$0 \qquad -\ln \sin x$

$-x \cot x + \ln \sin x + c$

5) $\int x^2 . \sin 3x \, dx$

$u = x^2 \qquad dv = \sin 3x$

$2x \qquad -\dfrac{\cos 3x}{3}$

$2 \qquad -\dfrac{\sin 3x}{9}$

$0 \qquad \dfrac{\cos 3x}{27}$

$-\dfrac{x^2}{3} \cos 3x + \dfrac{2x}{9} \sin 3x + \dfrac{2}{27} \cos 3x + c$

6) $\int e^x . \cos x \, dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^x dx$

$du = -\sin x \qquad v = e^x$

$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) dx$

$e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \sin x dx}_{e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx}$

$2 . \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x)$

$\int e^x \cos x dx = \dfrac{e^x}{2} (\cos x + \sin x)$

www.matbaz.com