

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

BELİRSİZ İNTEGRAL

$f:A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ için türevlenebiliyor ise $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ olur.

$df(x) = f'(x) \cdot dx$ ifadesine f fonksiyonun diferansiyeli denir.

Bu ifade $dy = f'(x) \cdot dx$ olarak da yazılabilir.

Örnek...1:

$y = x^2 + 3x + 5$ fonksiyonunun diferansiyeli, dy nedir?

$$dy = (2x + 3) dx$$

Örnek...2:

$x = \sin^2 t + 2\cos^2 t$ ise $dx = ?$

$$dx = \cos^2 t \cdot 2t + 4\cos t \cdot (-\sin t)$$

İntegral alma işlemi türevi veya diferansiyeli belli olan fonksiyonun kendisini (ilkeli) bulmak için yapılan işlemidir.

Türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonuna, $f(x)$ in belirsiz integrali (ilkeli) denir.

Yani $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$ ye $f(x)$ in ilkeli denir ve bu

$\int f(x) dx = F(x) + c$ ile gösterilir.

İntegral sembolü $\int$ integrand $f(x)$ ilkel $F(x)$ integral değişkeni dx integral sabiti $+c$

Örneğin $\int 2x dx = x^2 + c$

İNTEGRAL ALMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int f(k) dk = \int f(m) dm \dots$$

TEMEL BELİRSİZ İNTEGRAL ALMA KURALLARI

Birçok ilkel türeve ait kuralların tersine çevrilmesiyle elde edilir. Bunların bazıları şöyledir :

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$$

Örnek...3:

$$\int x^2 dx = ? \quad \frac{x^3}{3} + c$$

Örnek...4:

$$\int dx = ? \quad x + c$$

Örnek...5:

$$\int \frac{1}{x^3} dx = ? \quad \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

Örnek...6:

$$\int \sqrt{x} dx = ? \quad \frac{x^{3/2}}{3/2} + c$$

Örnek...7:

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = ? \quad \frac{x^{1/4}}{1/4} + c$$

Örnek...8:

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = ? \quad -\frac{1}{20} x^{29/30} + c$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...9 :

$$\int (x+x^3-4)dx=?$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 4x + C$$

Örnek...10 :

$$\int \left(\sum_{k=0}^2 (k+1)x^k \right) dx = ?$$

$$1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 \rightarrow x + x^2 + x^3 + C$$

Örnek...11 :

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \cdot t + C$$

sub: t

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\text{genelleme } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Örnek...12 :

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = ?$$

$$\frac{u'}{u} \Rightarrow \ln(x^2+5) + C$$

mutlak gerekmez

Örnek...13 :

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = ?$$

$$\frac{(\sin x)'}{\sin x} \rightarrow \ln|\sin x| + C$$

Örnek...14 :

$$\int \tan x dx = ?$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \frac{(\cos x)'}{\cos x} \rightarrow -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$$

Örnek...15 :

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2} dx = ?$$

$$\frac{3(x^2-2x)}{3(x^3-3x^2)} \Rightarrow \frac{1}{3} \ln|x^3-3x^2| + C$$

$3x^2-6x$

Örnek...16 :

$$\int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx = ?$$

$$\frac{(x \ln x)'}{x \ln x} = \ln|x \ln x| + C$$

$\ln x + \frac{1}{x} \cdot x$

$$3. \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + C$$

Örnek...17 :

$$\int \cos(x) dx = ?$$

$$\sin x + C$$

Örnek...18 :

$$\int \cos(2x) dx = ?$$

$$\frac{\sin 2x}{2} + C$$

Örnek...19 :

$$\int \cos(7x-3) dx = ?$$

$$\frac{\sin(7x-3)}{7} + C$$

Örnek...20 :

$$\int \sin(x) dx = ?$$

$$-\cos x + C$$

Örnek...21 :

$$\int \sin(6x+2) dx = ?$$

$$\frac{-\cos(6x+2)}{6} + C$$

Örnek...22 :

$$\int \sin(7-3x) dx = ?$$

$$\frac{-\cos(7-3x)}{-3} + C$$

Örnek...23 :

$$\int \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx = ?$$

$$3 \cdot \sin\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

$$4 \int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

Örnek...24 :

$$\int (2+\tan^2 x) dx = ?$$

$$\int 1 + \tan^2 x + \int 1 \rightarrow x' \text{leri yazın!}$$

$$\tan x + x + C$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

Örnek...25 :

$$\int (\tan^2 x) dx = ? \quad \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

$$5. \int \left(\frac{dx}{1+x^2} \right) = \arctan x + C$$

$$\text{Genelleme } \int \left(\frac{dx}{a^2+x^2} \right) = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

Örnek...26 :

$$\int \left(\frac{dx}{2+2x^2} \right) = ? \quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Örnek...27 :

$$\int \left(\frac{dx}{9+x^2} \right) = ? \quad \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

Örnek...28 :

$$\int \left(\frac{dx}{11+x^2} \right) = ? \quad \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \frac{x}{\sqrt{11}} + C$$

$$6. \int \left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \arcsin x + C = -\arccos x + C$$

$$\text{Genelleme} \quad \int \left(\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \right) = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C = -\arccos \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

Örnek...29 :

$$\int \left(\frac{dx}{\sqrt{4-4x^2}} \right) = ? \quad \frac{1}{2} \arcsin x + C$$

Örnek...30 :

$$\int \left(\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \right) = ? \quad \arcsin \frac{x}{4} + C$$

Örnek...31 :

$$\int \left(\frac{dx}{\sqrt{17-x^2}} \right) = ? \quad \arcsin \frac{x}{\sqrt{17}} + C$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \text{ve} \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^x + C$$

Örnek...32 :

$$\int 10^x dx = ? \quad \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

Örnek...33 :

$$\int (2^x + \ln 2) dx = ? \quad \frac{2^x}{\ln 2} + \ln 2 \cdot x + C$$

Örnek...34 :

$$\int 7^{\frac{x}{2}} dx = ? \quad \frac{(\sqrt{7})^x}{\ln \sqrt{7}} + C$$

Örnek...35 :

$$\int e^x + e^{2x} dx = ? \quad e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

TÜREV İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL İLİŞKİSİ

$$1 \quad \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = f(x)$$

$$2 \quad d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$3 \quad \left(\int d(f(x) dx) \right) = f(x) + c$$

Örnek...36 :

$$\frac{d}{dx} \left(\int x^2 dx \right) = ? \quad x^2$$

Örnek...37 :

$$d \left(\int x^2 dx \right) = ? \quad x^2 dx$$

Örnek...38 :

$$\int d(x^2) = ? \quad x^2 + c$$

Örnek...39 :

$$\int d(x^2) + \int d \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) dx$$

$$x^2 + c + \frac{1}{x} - x^2$$

Örnek...40 : $d(x^2) = 2x dx$

$$\int \frac{d(x^2)}{x^2+5} = \int \frac{2x dx}{x^2+5} = \ln(x^2+5)$$

Örnek...41 :

$$\int \cos^3 x \cdot d(\tan x)$$

$$\int \cos^3 x \cdot (1 + \tan^2 x) dx = \int \cos^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

Örnek...42 :

$f(x) = \frac{d}{dx} \int x \ln x dx$ ise f fonksiyonunun apsisi e olan noktadan çizilen teğetin eğimi ne olur?

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = \ln x + 1 \quad f'(e) = 1 + 1 = 2$$

Örnek...43 :

$$\int f(x) \cdot x^2 dx = \frac{x^6}{6} - 3x + 1 \text{ ise } f(2) = ?$$

$$f(x) \cdot x^2 = x^5 - 3$$

$$f(2) \cdot 4 = 29 \rightarrow f(2) = 29/4$$

Örnek...44 :

$$f(x) = \int d(x^2 - 2) \text{ ise } f'(9) = ?$$

$$f(x) = x^2 - 2 + c \Rightarrow f'(x) = 2x \quad f'(9) = 18$$

Örnek...45 :

$f(x) = \int (x^2 - 3x + 1) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonun $x=4$ de teğetinin eğimi nedir?

$$f'(4) = ?$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(4) = 16 - 12 + 1 = 5$$

Örnek...46 :

$$\int \left(\frac{x}{x+2} \cdot f(x) \right) dx = 2x^2 - 3x + 2 \text{ ise } f(x) = ?$$

$$\frac{x}{x+2} \cdot f(x) = 4x - 3 \Rightarrow f(x) = \frac{(4x-3) \cdot (x+2)}{x}$$

Örnek...47 :

$f(x) = \int (4x^2 - 2x + 3) dx$ ise $f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisini bulunuz

$$f''(x_0) = ?$$

$$f'(x) = 4x^2 - 2x + 3$$

$$f''(x) = 8x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/4$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

DEĞERLENDİRME

$$1) \int \left(\prod_{k=1}^2 (k+1)x^k \right) dx = \frac{6 \cdot x^4}{4} + C$$

$2x \cdot 3 \cdot x^2 = 6x^3$

$$2) \int \sqrt[7]{x} \cdot \sqrt[7]{x} \cdot \sqrt[7]{x} \cdot \dots dx = ?$$

$$\int \sqrt[7]{x} dx = \frac{x^{7/6}}{7/6} + C$$

$$3) \int \frac{x+1}{2x+2} dx = ? \quad \int \frac{dx}{2} = \frac{x}{2} + C$$

$$4) \int \frac{3x^2}{x^3+\sqrt{7}} dx = ? \quad \frac{1}{3} \ln |x^3+\sqrt{7}|$$

$$5) \int \frac{\ln x + x}{x^2 \ln x} dx = ? \quad \int \frac{x \ln x + x}{x^2 \ln x} = \int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} = \ln |x \ln x| + C$$

$$6) \int \sin\left(\frac{x+2}{3}\right) dx = ? \quad -\cos\left(\frac{x+2}{3}\right) \cdot 3$$

$$7) \int \cos(6-x\sqrt{5}) dx = ?$$

$$\sin(6-x\sqrt{5}) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$8) \int (1-\tan^2 x) dx = ?$$

$$\int -1 - \tan^2 x + 2 = -\tan x + 2x + C$$

$$9) \int \frac{1}{256+x^2} dx = ? \quad \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{16} + C$$

$$10) \int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx = ? \quad \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$11) \int \frac{6^x}{\ln 2 + \ln 3} dx = ? \quad \frac{6^x}{\ln 6} + C$$

$$12) \int x^5 + 6x^3 - \cos \frac{5x}{2} dx = ?$$

$$\frac{x^6}{6} + \frac{6x^4}{4} - \sin \frac{5x}{2} \cdot \frac{2}{5} + C$$

$$13) \int \left(-x^3 + \frac{6}{1+x^2} - 2x \right) dx = ?$$

$$-\frac{x^4}{4} + 6 \arctan x - x^2 + C$$

$$14) \int \left(\frac{8x^2-5x+7}{x^2} \right) dx = ?$$

$$\int 8 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} = 8x - 5 \ln x - \frac{7}{x} + C$$

$$15) \int 6x^2 \left(x^2 - \frac{1}{3x} + 2 \right) dx = ?$$

$$\int 6x^4 - 2x + 12x^2 = \frac{6x^5}{5} - x^2 + 4x^3 + C$$

$$16) \int \left(\frac{e^{2x} + 3e^x + 2}{e^{2x}} \right) dx = ? \quad \int 1 + 3e^{-x} + 2e^{-2x}$$

$$x - 3e^{-x} - \frac{2e^{-2x}}{2} + C$$

$$17) \int \left(\frac{7}{4x-3} \right) dx = ? \quad \frac{7}{4} \int \frac{4}{4x-3} = \frac{7}{4} \ln |4x-3| + C$$

$$18) \int (5 + \tan^2 x + \cot^2 x) dx = ?$$

$$\int 1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 3 = \tan x - \cot x + 3x + C$$

İNTEGRAL-1

TEMEL İNTEGRAL KAVRAMLARI

19) $\int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = ?$

$$\int \cos 2x = \frac{\sin 2x}{2} + C$$

20) $\int \left(\frac{1-\cos x}{1-\cos x} \right) dx = ?$ $\int \ln(\cos x) = x + \ln x + C$

21) $\int (\cos 2x \cdot \cos 4x) dx = ?$

$$\int \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C$$

22) $\int \left(\frac{1-\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} \right) dx = ?$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$-\cot x + \tan x + C$$

23) f fonksiyonu (2,3) noktasındaki teğeti x eksenine pozitif yönde 45 derecelik açı yapıyor ve $f''(x) = 2x - 3$ ise $f(0)$ kaçtır?

$$f' = \int f'' = x^2 - 3x + C \quad f(2) = 3$$

$$f'(2) = 4 - 6 + C = 1 \rightarrow C = 3 \quad f'(2) = 1$$

$$f = \int f' = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x + d \quad f(0) = d = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = \frac{8}{3} - 6 + 6 + d = 3 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

24) f(x) fonksiyonunun grafiğine x=1 noktasında çizilen teğetin eğimi 4, $f''(x) = 6x + 2$ ve $f(1) = 2$ olduğuna göre, $f(2)$ kaçtır?

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + C \quad f'(1) = 4$$

$$f'(1) = 5 + C = 4 \rightarrow C = -1 \quad f(1) = 2$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + d \quad f(2) = ?$$

$$f(1) = 1 + d = 2 \rightarrow d = 1$$

$$f(2) = 8 + 4 - 2 + 1 = 11$$

25) $y=f(x)$ fonksiyonunun her x gerçel sayısı için birinci türevi $(8x^2 - 6x + 2)$ dir. $A(1,2) \in f$ ise

$$\int \left(\frac{f(x)}{x^2} \right) dx = ? \quad f(1) = 2$$

$$\int \frac{8x^2 - 6x + 2}{x^2} = \int \left(\frac{8}{x} - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 8 \ln x - 6 \ln x - \frac{2}{x} + C$$

$$f(1) = \frac{8}{1} - \frac{6}{1} - \frac{2}{1} + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\frac{4}{3} x^2 - 3x + 2 \ln x + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{x} \right) + C$$

26) $\int (f'''(x)) dx = mx^2 + nx - \sqrt{3}$ veriliyor. f fonksiyonun dönüm noktası A(0,1) dir. Bu fonksiyon x=1 de maksimum, x=-2 de minimum değerlerine sahipse (m+n) kaçtır?

$$f''(x) = 2mx + n \rightarrow n = 0$$

$$f'(x) = mx^2 + nx + C \quad f'(1) = 0 \quad f'(-2) = 0$$

$$m + n + C = 0 \quad m + C = 0 \quad m = 0$$

$$4m - 2n + C = 0 \quad 4m + C = 0 \quad C = 0$$

$$m + n = 0$$

27) $\int \left(\frac{f'(x)}{f^3(x)} \right) dx = \int dx$ ve $f(0) = 1$ ise $f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

$$u = f(x) \quad du = f'(x) dx$$

$$\int \frac{du}{u^3} = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2f^2(x)} + C$$

$$x=0 \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2C^2} \Rightarrow C = 1$$

$$-\frac{1}{2f^2(x)} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{1-2x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{0} = \infty$$

28) P(x) bir polinom fonksiyon ve $P(x) \int P(x) dx = 4x^3 - 6x$ ise bu polinomun katsayıları toplamı kaç olabilir?

$$(mx+n) \left(\frac{mx^2}{2} + nx + C \right)$$

$$\frac{m^2 x^3}{2} + mnx^2 + mCx + \frac{nm x^2}{2} + nx + nC = 4x^3 - 6x$$

$$m=4, n=1, C=0$$

$$m+n=5$$

29) $\frac{d}{dx} \int (e^{2x} + \ln x - \arcsin x \sqrt{x}) dx = ?$

$$e^{2x} + \ln x - \arcsin x \sqrt{x}$$

30) $\int \left(\frac{d(\sin x)}{\cos^3 x} \right) = ?$ $\int \frac{\cos x}{\cos^3 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + C$

31) $\int \left(\frac{d(x^3)}{x^2} \right) = ?$ $\int \frac{3x^2 dx}{x^2} = \int 3 dx = 3x$

32) $\int (d(x^3 + 4x + \sqrt{21})) = ?$

$$x^3 + 4x + C$$

33) $\int (x^2 - 1) \cdot f(x) dx = \frac{x^5}{5} - x$ ise f fonksiyonuna $x = \frac{1}{2}$

noktasından çizilen teğet x eksenine pozitif yönde kaç derecelik açı yapar? $\arctan \left[f'\left(\frac{1}{2}\right) \right] = ?$

$$(x^2 - 1) \cdot f(x) = x^5 - x$$

$$f(x) = x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 2x \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \theta = 45^\circ$$