

TAM SAYILAR

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, z, \dots\}$
kümese tam sayılar kümesi denir.

UYARI

$\mathbb{Z}$ kümesinin
 $\mathbb{Z}_C = \{x: x=2k, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\}$ ve
 $\mathbb{Z}_T = \{x: x=2k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -1, 1, 3, \dots\}$
alt kümeleri sıklıkla karşımıza çıkar.
Önemli bir başka alt kümesi de asal sayılardan oluşan $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ kümesidir.

Örnek...1 :

a, b, c birer tam sayı ve $a \cdot b = 2c - 1$ olduğuna göre aşağıdaki durumlardan hangileri doğru olabilir?

- a) a ve b tek sayılardır. ✓
b) a ve b çift sayılardır. ✗
c) a çift, b tek sayıdır. ✗
d) a - b tek sayıdır. ✗
e) c tek sayıdır. ?

Örnek...2 :

a, b, c birer tam sayı ve $a \cdot b + 5 = 12c$ olduğuna göre aşağıdaki durumlardan hangileri doğru olabilir?

- a) a ve b tek sayılardır. ✓
b) a ve b çift sayılardır. ✗
c) a çift, b tek sayıdır. ✗
d) a - b tek sayıdır. ✗
e) c tek sayıdır. ?

Leonardo Fibonacci, her sayının kendinden önce gelen sayı ile toplanarak bir sonrakinin elde edildiği sayı dizisini keşfetmiştir.
Bu diziye, Fibonacci sayıları denir. Bu sayı dizisi, doğadaki birçok oluşumun düzeninde bulunduğu varsayılan altın oranı kapsar ve birçok bilimsel araştırmaya dayanak teşkil eder.

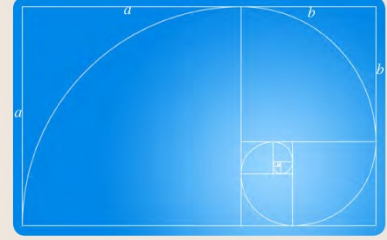
FİBONACCİ SAYI DİZİSİ

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, ..., b, a, a + b, ...

Altın oran (φ)

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

$$\varphi = 1.61803398\dots$$



Tam sayılar, sayı doğrusu üzerinde gösterilirken bir doğru üzerinde bir nokta alınır.

Bu nokta, sıfır sayısı ile eşlenir ve sayı doğrusunun başlangıç noktası kabul edilir. Başlangıç noktasının sağında ve solunda eşit aralıklarla noktalar işaretlenir. Sayı doğrusundaki noktalar koordinatları ile birlikte $O(0)$, $A(1)$ şeklindedir.



Örnek...3 :

Rakamları farklı üç basamaklı en büyük pozitif tam sayı ile rakamları farklı üç basamaklı en büyük negatif tam sayının toplamı kaçtır?

$$987 + (-102) = 885$$

Örnek...4 :

x, y, z birbirinden farklı negatif tam sayılardır. $6x + 3y + 2z$ toplamının en büyük değerini bulunuz.

$$6 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3)$$

$$= -6 - 6 - 6 = -18$$

Örnek...5 :

x, y ve z negatif tam sayılar olmak üzere $x \cdot y = 24$ ve $y \cdot z = 60$ ise a + b + c toplamının en büyük değerinin kaç olduğunu bulunuz.

$$x \quad y \quad z$$

$$-2 \quad -12 \quad -5$$

$$x + y + z = -19$$

$$(24, 60)$$

Örnek...6 :

$(-72 + 160 : 4) : (5 - 16 + 3)$ işleminin sonucunu bulunuz.

$$(-72 + 40) : (-8) = -32 : -8 = 4$$

Örnek...7 :

a, b ve c pozitif tam sayılar olmak üzere
 $(2a + b + c) \cdot (a + 2b - c) = 17$ ise a + b toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned} 2a + b + c &= 17 \\ 2a + b - c &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 3(a + b) &= 18 \\ a + b &= 6 \end{aligned}$$

Örnek...8 :

x, y, birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere
 $3x + 4y = 51$ veriliyor.
 Buna göre x in en çok kaç farklı değeri vardır?

$$\begin{array}{c} x \\ 17 \\ 13 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} y \\ 0 \rightarrow (0?) \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} x \text{ in } 4 \text{ değeri} \\ \text{varır.} \end{array}$$

Bir x reel sayısına karşılık gelen noktanın sayı doğrusunda 0 (sıfır) a olan uzaklığına x sayısının mutlak değeri denir ve $|x|$ şeklinde yazılır.

Başka bir deyişle

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ dir.}$$

Örnek...9 :

$|3| - |-9| + |-7| - |-6|$ işleminin sonucu kaçtır?

$$3 - 9 + 7 - 6 = 10 - 15 = -5$$

Örnek...10 :

$x < 0 < y < z$ ise
 $|x - y| + |x - z - 4| - |z - y + 2| - |y + 1| + |8 - 2x|$ işleminin sonucu kaçtır?

$$\begin{aligned} -x + y - x + z + 4 - z + y - 2 - y - 1 + 8 - 2x \\ -4x + y + 10 \end{aligned}$$

ERATOSTHENES (ERATOSTEN) KALBURU

Asal sayıları bulmak için aşağıdaki gibi bir liste yapılır

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Adım: 1 in üzerine çarpı atılır.
2. Adım: 2 yi yuvarlak içine alınır ve 2 nin tüm katlarının üzerine çarpı atılır (4, 6, 8, 10, 12, ...).
3. Adım: 3 ü yuvarlak içine alınır ve 3 ün tüm katlarının üzerine çarpı atılır (6, 9, 12, 15, ...).
4. Adım: 5 i yuvarlak içine alınır ve 5 in tüm katlarının üzerine çarpı atılır (10, 15, 20, 25, ...).

Bu işlemler bittiğinde yuvarlak içine alınan sayılar asal sayılardır. Buna göre ilk 100 sayıma sayısı içindeki asal sayılar; 2, 3, 5, 7, 11, ...97 olur.

Örnek...11 :

a, b ve c farklı asal sayılardır. $a + b + c = 106$ olduğuna göre, $a \cdot b \cdot c$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} a = 2 \text{ olur} \quad 2 + b + c &= 106 \quad b + c = 104 \\ 3 \quad 101 \\ 7 \quad 97 \\ 43 \quad 61 \end{aligned}$$

$$2 \cdot 43 \cdot 61 = 5246$$

Aralarında asal sayılar 1 den başka pozitif ortak böleni olmayan iki veya daha fazla pozitif tam sayıya aralarında asal sayılar denir. 1 ile her pozitif tamsayı aralarında asaldır.

Örnek...12 :

5 ile 7 sayıları,
 9 ile 25 sayıları,
 13 ile 14 sayıları,
 15, 26, 49 sayıları aralarında asaldır.

Örnek...13 :

$2x - 123$ ve $3y - 14$ sayıları aralarında asaldır.

$$\frac{2x - 123}{3y - 14} = \frac{183}{427} \text{ olduğuna göre } x + y \text{ kaçtır?}$$

$$2x - 123 = 3 \rightarrow 2x = 126 \rightarrow x = 63$$

$$3y - 14 = 7 \rightarrow 3y = 21 \rightarrow y = 7$$

$$x + y = 70$$

ASAL ÇARPANLARA AYIRMA

x, y, z pozitif tam sayılar ve a, b, c birbirinden farklı asal sayılar olsun. k sayısının $k = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ şeklinde yazılmasına k sayısının asal çarpanlara ayrılmış biçimi denir.

Örnek...14 :

272 sayısını asal çarpanlarına ayırınız

$$\begin{array}{r} 272 \div 2 = 136 \\ 136 \div 2 = 68 \\ 68 \div 2 = 34 \\ 34 \div 2 = 17 \\ 17 \div 17 = 1 \end{array} \quad 272 = 2^4 \cdot 17$$

Örnek...15 :

x ve y pozitif tam sayılardır. $y^3 = 20 \cdot x$ olduğuna göre x in en küçük değeri için $x + y$ toplamını bulunuz.

$$20 = 2^2 \cdot 5 \quad y^3 = 2^2 \cdot 5 \cdot x \quad \begin{array}{l} x_{\min} = 5^2 \cdot 2^1 \\ y_{\min} = 5 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 50 \\ y = 10 \\ x+y = 60 \end{array}$$

Örnek...16 :

x ve y pozitif tam sayılardır. $y^4 = 600 \cdot x$ olduğuna göre x in en küçük değeri için $x + y$ toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r} 600 \div 2 = 300 \\ 300 \div 2 = 150 \\ 150 \div 2 = 75 \\ 75 \div 3 = 25 \\ 25 \div 5 = 5 \end{array} \quad 600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

$$y^4 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot x$$

$$x_{\min} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1350$$

$$y_{\min} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$x+y = 1380$$

Örnek...17 :

$64^5 \cdot 15625^3$ sayısı kaç basamaklıdır?

$$(2^6)^5 \cdot (5^6)^3 = 2^{30} \cdot 5^{18} = 2^{30} \cdot 5^{18} = 10^{21} \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 10^{21} \cdot 2^9 \cdot 5^9$$

$$10^{21} \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 10^{21} \cdot (2 \cdot 5)^9 = 10^{21} \cdot 10^9 = 10^{30}$$

Bir Tam Sayının Pozitif Tam Sayı Bölenleri Sayısı

a, b, c birbirinden farklı asal sayılar olsun. $k = a^x \cdot b^y \cdot c^z$

- sayısının asal bölen sayısı 3'tür.
- pozitif (ya da negatif) bölen sayısı : $(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1)$ tanedir.
- tamsayı bölen sayısı : $2 \cdot (x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1)$ tanedir

Örnek...18 :

360 tam sayısının

bölen sayılarını bulunuz.

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \quad \begin{array}{l} p_{\text{b}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\ n_{\text{b}} = 24 \\ t_{\text{b}} = 48 \\ o_{\text{b}} = 3 \end{array}$$

Örnek...19 :

1400 tam sayısının tek tamsayı bölen sayılarını bulunuz.

$$14 \cdot 10^2 = 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^1$$

$$\begin{array}{l} \text{tek} \leftarrow 2 \cdot 5 = 10 \\ t_{\text{b}} + o_{\text{b}} = (2+1)(1+1) = 6 \\ p + n = 12 \quad (\text{tek tamsayı bölenleri}) \\ n_{\text{b}} = 12 \end{array}$$

Örnek...20 :

x bir tamsayı olmak üzere, $A = \frac{2x+720}{x}$ sayısı da tam

sayı olduğuna göre, birbirinden farklı en çok kaç farklı x değeri vardır?

$$A = 2 + \frac{720}{x} \quad x \mid 720 \quad 720 = 144 \cdot 5 = 12^2 \cdot 5$$

$$x = 2 \cdot (4+1)(2+1)(1+1) = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 60$$

Örnek...21 :

$2^x \cdot 12^n$ sayısının 64 tane tam sayı böleni olduğuna göre x sayısının değerini bulunuz.

$$2^x \cdot 2^{2n} \cdot 3^{2n} \rightarrow 2^{x+2n} \cdot 3^{2n} \quad (x+2n) \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

$$x+2n = 16 \quad x=16-2n$$

Örnek...22 :

$18 \cdot 15^n$ sayısının asal olmayan pozitif bölen sayısı 93 olduğuna göre n kaçtır?

$$2^1 \cdot 2 \cdot 5^1 \cdot 3^n \rightarrow 2^{n+2} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^1$$

$$(n+3) \cdot 2 \cdot (n+1) - 3 = 93$$

$$\frac{(n+1)}{6} \cdot \frac{(n+3)}{8} = 48 \quad n=5$$

p bir doğal sayı olmak üzere, 1 den p ye kadar olan doğal sayıların çarpımına p faktöriyel denir ve $p!$ şeklinde gösterilir.

Örnek...23 :

$\frac{2!}{1!} + \frac{3!}{2!} + \frac{4!}{3!} + \dots + \frac{29!}{28!}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$2+3+\dots+29 = \frac{29 \cdot 30}{2} - 1 = 434$$

Örnek...24 :

9! sayısını ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- Asal çarpanlarının toplamını bulunuz. $2+3+5+7 = 17$
- Pozitif tam sayı bölenleri sayısını bulunuz. $8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 160$
- Pozitif tek tam sayı bölenleri sayısını bulunuz. $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$

$$9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$