GEOMETRİK KAVRAM VE ŞEKİLLERİN İNŞASI

Geometrik şekiller bilim, teknoloji ve sanatın temelinde yer alır ve günlük yaşamı etkiler. Simetri ve düzene dayanan geometrik inşa, mimaride köprü ve binaların temelini oluşturur. Fraktallar doğadaki tekrar eden karmaşık yapıları gösterir. Kaplama, yüzeyleri estetik desenlerle süslerken; süsleme bu desenleri tekstil ve seramik gibi alanlarda görsel zenginliğe dönüştürür. Bu kavramlar hem matematikte hem de tasarımda önemli bir yere sahiptir.

Pergel (yayçizer), daire ve yay çizmek için kullanılan bir çizim aracıdır. Genellikle iki kolludur: bir ucu (iğne ucu) sabitlenerek merkez noktayı belirler, diğer ucundaki kalem ya da kurşun kalem ise sabit uzaklıkta dönerek düzgün bir daire çizer. Matematikte ve teknik çizimde sıkça kullanılır; ayrıca uzunluk ölçme ve eşit parçalar oluşturma gibi işlemlerde de işe yarar

Ölçüsüz cetvel (çizgeç), üzerinde herhangi bir ölçü birimi (cm, mm gibi) bulunmayan, sadece düz çizgi çizmek için kullanılan bir araçtır.
Matematikte özellikle geometrik çizimlerde kullanılır. Bu araçla uzunluk ölçülmez; yalnızca iki nokta arasını birleştirerek doğru çizmek ya da çizimleri düzenli yapmak amaçlanır.

PERGEL VE ÇİZGEÇ KULLANARAK YAPILAN ÇİZİMLER

Pergel ve çizgeç çizimleri, klasik geometrinin (özellikle Öklid geometrisinin) temelini oluşturan, yalnızca iki araç kullanarak yapılan geometrik kurgulardır. Bu yöntem, matematiğin en saf ve "oyunsu" alanlarından biri olarak kabul edilir çünkü temel amaç, karmaşık şekilleri en basit araçlarla hatasız bir şekilde inşa etmektir. Sayısal ölçüm olmadan, yalnızca **mantıksal adımlarla** kesin şekiller elde edilmesini sağlamaktadır

Çizim Oyunun Kuralları
Bu çizimlerde sadece şu üç işlem "yasal" kabul edilir:

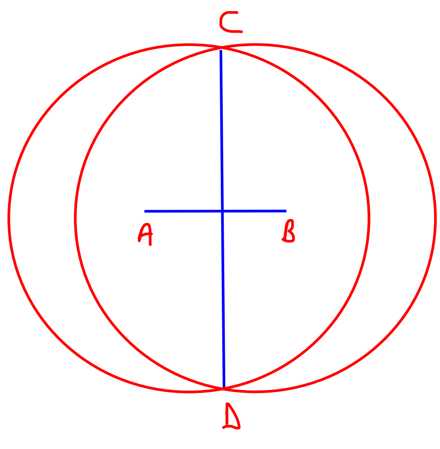
1.Verilen iki noktadan geçen bir **doğru çizmek**.
2.Merkezi bir nokta olan ve başka bir noktadan geçen bir **çember çizmek**.
3.Doğruların ve çemberlerin birbirleriyle kesiştiği **yeni noktaları belirlemek**.

Neler Yapılabilir?
Bu kısıtlı araçlarla şaşırtıcı derecede karmaşık işler başarılabilir:
· Bir doğru parçasına dikme çıkmak veya onu iki eş parçaya bölmek.
· Bir açının açıortayını çizmek.
· Düzgün çokgenler (eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen vb.) inşa etmek.
· Bir açıya eş bir açı oluşturmak.

Neler Yapılamaz? (Kanıtlanmış!)
Yüzyıllarca denenen ama 19. yüzyılda *imkânsız* olduğu ispatlanan üç klasik problem:
1. Açıyı üçe bölmek (genel açı için)
2. Küpü iki katına çıkarmak ($\sqrt[3]{2}$ cetvelle çizilemez)
3. Çemberi kareye dönüştürmek (π'nin aşkın sayı olması nedeniyle)

Neden Önemli
Bu çizimler sadece birer bulmaca değildir; antik dönemden bu yana mimari, sanat ve mühendislikteki simetri ve oran anlayışının temelini oluşturur. Geleneksel geometrik desenlerin (örneğin Selçuklu yıldızları veya karmaşık tezyinatlar) çoğu, aslında bu iki basit aracın birbiriyle olan dansından doğmuştur.
Bugün modern yazılımlar her şeyi bizim yerimize ölçse de, pergel ve çizgeçle yapılan bir çizim, geometrinin "mantıksal iskeletini" anlamanın en saf yoludur.

Örnek...1 :
Doğru Parçasının Orta Dikmesinin inşa edilmesi
Verilen bir doğru parçasına aşağıdaki adımları uygulayarak orta dikmesini inşa edebiliriz.
1. AB doğru parçasının uçlarına pergeli aç (AB'den uzun yarıçap).
2. A merkezli yay çiz.
3. Aynı yarıçapla B merkezli yay çiz.
4. İki yayın kesişim noktaları C ve D olsun.
5. CD'yi çizgeçle birleştir → bu, AB'nin **orta dikmesi**dir.

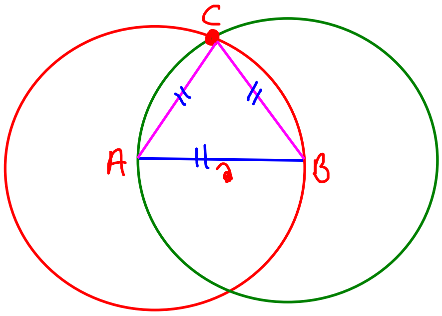


Neden çalışır? C ve D noktaları hem A'ya hem B'ye eşit uzaklıktadır (aynı yarıçap). Bu nedenle CD doğrusu, AB'nin dik orta doğrusudur. (ACBD eşkenar dörtgen oluşturur, eşkenar dörtgende köşegenler birbirlerini dik ortalar, [CD] ve [AB] köşegendirler)

Örnek...2 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla eşkenar üçgen inşa ediniz.(oluşturma adımlarını yazıp çizimle gösteriniz.)

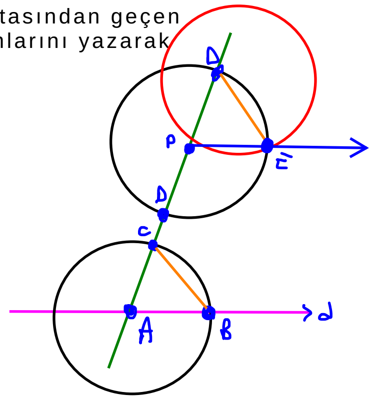
1 Bir doğru parçası çiz ve uçlarını **A** ve **B** olarak isimlendir. Bu kenar uzunluğu *a* olsun.
2 Pergeli **AB = a** uzunluğuna aç.
3 A merkezli, yarıçapı *a* olan bir yay çiz (B'nin üst tarafına doğru).
4 B merkezli, aynı yarıçapla (*a*) yay çiz (A'nın üst tarafına doğru).
5 İki yayın kesişim noktasını **C** olarak işaretle.
6 Çizgeçle **A–C** ve **B–C** doğrularını çiz.
7 ABC eşkenar üçgendir : AB = AC = BC = a
Neden çalışır? C, hem A'dan hem B'den *a* uzaklıktadır (aynı yarıçap). Üç kenar da eşit, üç açı da 60°.



Örnek...5 :

Bir doğruya dışındaki P noktasından geçen paralel doğrunun çizim adımlarını yazarak gösteriniz

ADIMLAR
1 d doğrusunu ve dışında P noktasını çiz.
2 d üzerinde keyfi A noktasını seç. PA doğrusunu çizgeçle çiz (bu bir kesici/transversal olacak).
3 Pergeli uygun bir yarıçapa aç. A merkezli yay çiz; PA ile d 'yi kessin. Kesim noktaları B ve C olsun.
4 Aynı yarıçapla P merkezli yay çiz; PA 'yı kessin. Kesim noktası D olsun.
5 Pergeli BC aralığına aç. D merkezli bu aralıkla yay çiz; P merkezli yay ile kesişsin → nokta E .
6 Çizgeçle P ve E 'yi birleştir ve uzat.
7 ∠DPE = ∠PAB → d ∥ PE

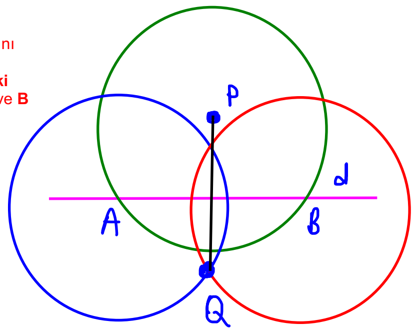


Örnek...3 :

Bir doğruya dışındaki P noktasından dik bir doğrunun çizilmesi adımlarını yazarak gösteriniz

d doğrusunu ve doğrunun dışında **P** noktasını çiz.
Pergeli **P** noktasına koy ve **d doğrusunu iki noktada kesen** bir yay çiz. Bu noktaları **A** ve **B** olarak isimlendir.
Pergeli biraz daha büyük bir yarıçapa aç (AB/2'den büyük).
A merkezli bir yay çiz (P'nin karşı tarafında, d'nin altında).
Aynı yarıçapla **B** merkezli yay çiz. Yayların kesişim noktasını **Q** olarak işaretle.
Çizgeçle **P** ve **Q** 'yu birleştir.
PQ doğrusu, d'ye diktir. Ayak noktasını **H** olarak isimlendir.

Mantık: Q, A ve B'ye eşit uzaklıkta. P de A ve B'ye eşit uzaklıkta. Dolayısıyla PQ, AB'nin dik orta doğrusudur → d'ye dik. Ya da AQBP deltoid olur. PQ deltoidin simetri ekseni olur. PQ ile AB dik olur

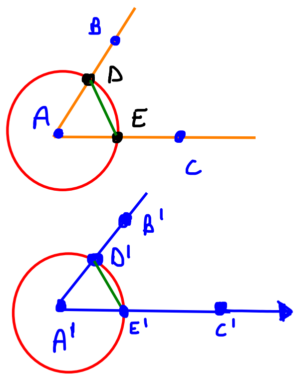


Örnek...6 :

Bir açıya eş bir açı çizilmesi adımlarını yazarak gösteriniz

ADIMLAR
1 Kopyalanacak açıyı (∠BAC) ve yeni açının başlangıç noktası A' ile kolu A'B' 'yi hazırla.
2 Pergeli keyfi bir *r* yarıçapına aç. A merkezli yay çiz → AB ve AC kollarını D ve E 'de kes.
3 Aynı yarıçapla A' merkezli yay çiz → A'B' 'yi D' 'de kessin.
4 Pergeli DE aralığına aç. D' merkezli bu aralıkla yay çiz → önceki yayla E' 'de kesişsin.
5 Çizgeçle A' ile E' 'yi birleştir ve uzat → A'C' kolu oluşur.
6 ∠B'A'C' = ∠BAC

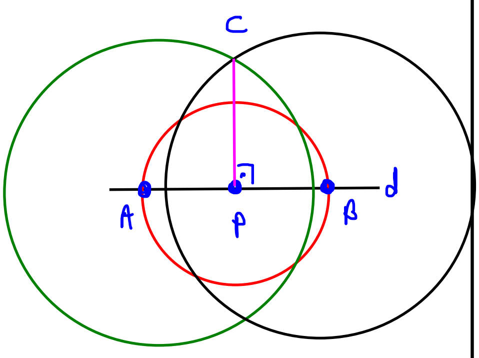
Neden çalışır? DE = D'E' (aynı uzunluk kopyalandı) ve AD = A'D', AE = A'E' (aynı yarıçap). Üç kenarı eşit iki üçgen eştir (SSS) → açılar eşittir.



Örnek...4 :

Bir doğruya,doğrunun üzerindeki bir noktadan dik bir doğru çizilmesi adımlarını yazarak gösteriniz

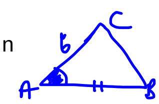
1 d doğrusunu ve üzerinde P noktasını işaretle.
2 Pergeli P merkezine koy. Keyfi bir yarıçapla d doğrusu üzerinde A ve B noktalarını belirle (P'nin iki yanında, PA = PB).
3 Pergeli daha büyük bir yarıçapa aç. A merkezli yay çiz (d'nin üst tarafında).
4 Aynı yarıçapla B merkezli yay çiz (d'nin üst tarafında). Kesişimi C olarak işaretle.
5 Çizgeçle P ve C 'yi birleştir ve uzat.
6 PC ⊥ d (P noktasından d'ye dik doğru)



Fark: Ornek 3'te nokta dışarıda, burada üzerinde. Aynı mantık: A ve B'ye eşit uzaklıktaki noktaların bağlantısı dik oluşturur. ya da şöyle düşünürüz : ABC ikizkenar üçgendir.P noktası AB nin orta noktasıdır.

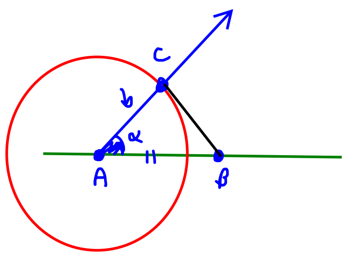
Örnek...7 :

İki kenarının uzunluğu ile bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsü bilinen bir üçgen çizilmesi adımlarını yazarak gösteriniz



1 Bir referans doğrusu üzerine A noktasını koy. Birinci kenar uzunluğu c = AB olsun; cetvel ile B 'yi belirle.
2 Verilen ∠A açısını, Örnek 6'daki yöntemle A noktasına kopyala → ikinci kolun yönü elde edilir.
3 Pergeli ikinci kenar b uzunluğuna aç. A merkezli bu yarıçapla yeni kol üzerinde C 'yi işaretle.
4 Çizgeçle B ile C 'yi birleştir.
5 ABC üçgeni , AB = c , AC = b , ∠BAC = α koşullarını sağlar.

KAK (Kenar–Açı–Kenar) eşlik koşulu: İki kenar ve aralarındaki açı verilince üçgen tek değer belirler.



Örnek...8 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla eşkenar üçgenin herhangi bir kenarına ait yüksekliği inşa ediniz.

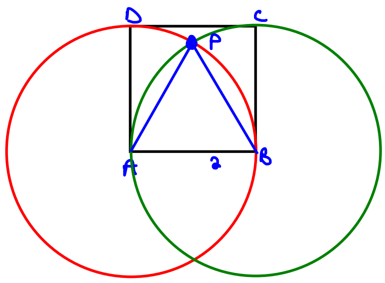
örnek 2 deki bir ABC eşkenar üçgeni çizeriz.
sonra yüksekliği çizilecek olan üçgenin kenarını belirleriz.
Diyelim ki AB kenarına ait yüksekliği çizeceğiz
AB kenarının karşısında bulunan C noktasından AB ye dikme çizmemiz isteniyor. bunu da bir doğruya (burada AB) dışındaki bir noktadan (burada C) dik çizme uygulaması (örnek 3 de yaptığımız şekilde) olarak yapabiliriz.

Örnek...9 :

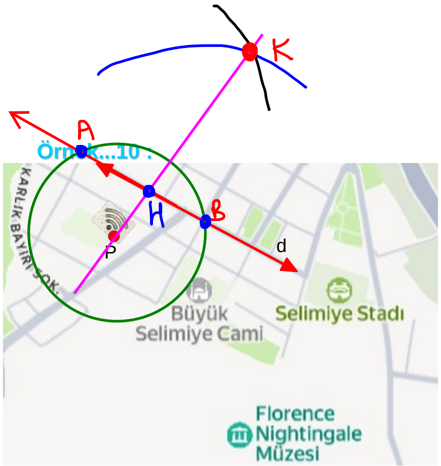
Bir kare içine eşkenar üçgen inşasını pergel ve çizgeç kullanarak yapınız.

ABCD karesini inşa et (kenar = *a* , Örnek 14 yöntemi).
2 AB tabanını baz al. Eşkenar üçgenin bir köşesi **A** , diğeri **B** olacak.
3 Pergeli **AB = a** uzunluğuna aç.
4 A merkezli yay çiz (karenin içinde, yukarı).
5 Aynı yarıçapla **B** merkezli yay çiz (karenin içinde, yukarı). Kesişimi **P** olarak işaretle.
Çizgeçle **A–P** ve **B–P** 'yi birleştir. **ABP eşkenar üçgenidir** ve kare içindedir. P noktası karenin içinde kalır çünkü eşkenar üçgenin yüksekliği (≈0.866a) < karenin kenarı (a).

Not: Kare içindeki eşkenar üçgenin üçüncü köşesi P, karenin içinde kalır. PA ve PB karenin kenarlarını kesmez.



Örnek...10 :



istenen P den d doğrusuna çizilen dikmedir. Başka bir deyişle bir doğruya dışındaki bir noktadan dik çizmemiz isteniyor

Şekildeki d doğrusu boyunca hareket ederek Selimiye stadına giden Barkut, hareketi boyunca sadece P noktasına en yakın olduğu noktada cep telefonunun kablosuz internete bağlı olduğunu farkediyor. Buna göre bu noktayı doğru üzerinde bularak işaretleyiniz.

P merkezki çemberin d doğrusunu kestiği noktalar A ve B olsun. A merkezli ve B merkezli eş yarıçaplı çemberlerin kesim noktası olan K işaretlndikten sonra KP ve d doğrularının kesim noktası olan H aranan noktadır.

Üçgenin ana elemanları kenarlar ve açılardır; **açıortay**, **kenarortay** ve **yükseklik**, bir üçgenin **yardımcı elemanları** (veya temel olmayan elemanları) olarak adlandırılır. Yardımcı elemanlar ana yapıyı analiz etmemizi, merkezleri bulmamızı ve özel oranlar kurmamızı sağlar.

Eleman	Ne Yapar?	Kesişim Noktası
Kenarortay	Kenarı ikiye böler	Ağırlık Merkezi (G)
Açıortay	Açıyı ikiye böler	İç Teğet Çember Merkezi (I)
Yükseklik	Dik iner	Diklik Merkezi (H)
Kenar Orta Dikme	Kenarı ortalayıp dik çıkar	Çevrel Çember Merkezi (O)

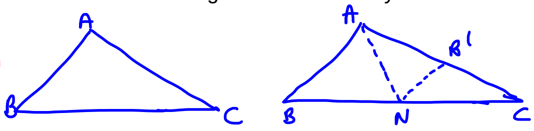
***Merkezi adlandırırken verilen nokta ismi farklı verilebilir**

Örnek...11 :

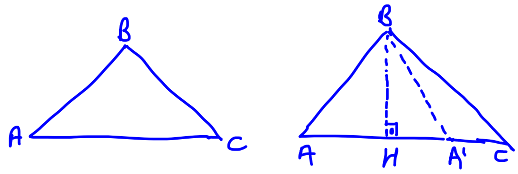
Üçgende katlama ile elde edilebilecek yardımcı elemanlar.

Üçgen şeklindeki bir kâğıdın herhangi bir kenar ya da köşesine ait yardımcı elemanları, kâğıdı katlayarak nasıl elde edebileceğimizi adımlarıyla yazınız.

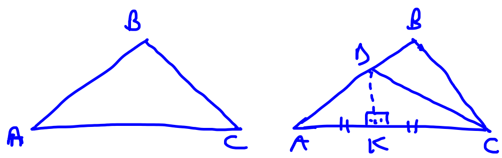
Kenarı kenar üzerine katlayarak bir köşenin açıortayını çizebiliriz. Şekilde AB kenarı AC üzerine katlanarak BAC açısının açıortayı olan [AN] elde edilir.



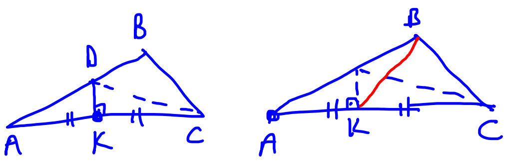
Köşeyi kenar üzerine katlayarak bir kenarın yüksekliğini çizebiliriz. Şekilde A köşesi AC üzerine katlanarak b kenarına ait yükseklik olan [AH] elde edilir. (A ve C dar acılar)



Köşeyi köşe üzerine katlayarak bir kenarın orta dikmesini çizebiliriz. Şekilde A köşesi C köşesi üzerine katlanarak b kenarına ait orta dikme olan [KD] elde edilir.



Iki köşeyi birleştiren kenar üzerinden birini diğeri üzerine katlayıp kenarın orta noktasını bulup bu noktayla karşı köşeyi birleştirerek kenarortay elde edebiliriz. Son şekilde K ile B birleştirilerek AC kenarının kenarortayı (şekilde [KB]) elde edilebilir.



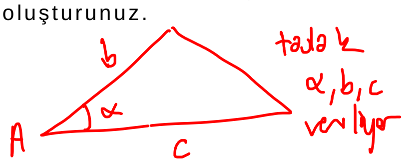
Bir üçgen çizmek için şu durumlardan biri yeterlidir:

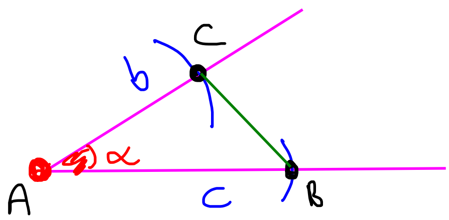
- Üç kenarının uzunluğu biliniyorsa.
- İki kenarı ve aralarındaki açının ölçüsü biliniyorsa.
- İki açısı ve bu açılar arasındaki kenarın uzunluğu biliniyorsa.

Örnek...12 :

İki kenarının uzunluğu ile bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsü bilinen bir üçgenin çizim aşamalarını oluşturunuz.

1 Verilen açıyı **A** noktasına kopyala (Örnek 6 yöntemi).
2 Pergeli birinci kenar **c** uzunluğuna aç; A'dan bir kol üzerinde **B** 'yi işaretle.
3 Pergeli ikinci kenar **b** uzunluğuna aç; diğer kol üzerinde **C** 'yi işaretle.
4 B–C'yi birleştir → **ABC üçgeni** tamamlanır

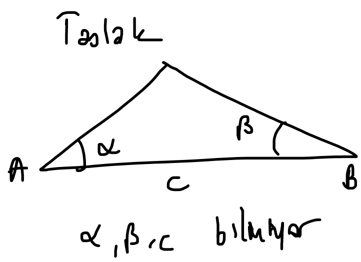


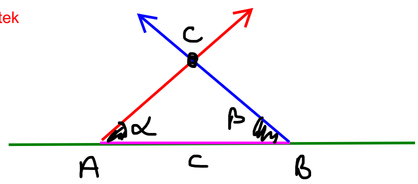


Örnek...13 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla iki açısının ölçüsü ve bu iki açının ortak kenar uzunluğu verilen bir üçgen inşa ediniz

1 Verilen kenar uzunluğu c = AB olsun. Doğru üzerine A ve B'yi işaretle.
2 Verilen ∠A açısını Örnek 6 yöntemiyle A noktasına kopyala → bir kol elde edilir.
3 Verilen ∠B açısını Örnek 6 yöntemiyle B noktasına kopyala → bir kol elde edilir.
4 İki kolun kesişim noktası C 'dir.
5 ABC , istenilen üçgendir. ∠CAB = α, ∠CBA = β, AB = c . AKA (Açı−Kenar−Açı): İki açı ve aralarındaki kenar verilince üçgen tek değer belirler. α β A B C

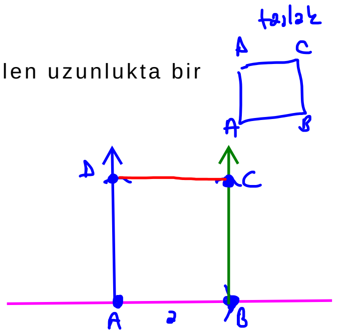




Örnek...14 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla verilen uzunlukta bir kare inşa ediniz

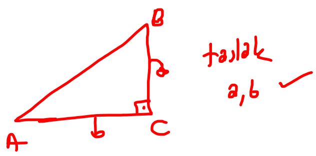
1 Bir doğru üzerine **A** 'yı koy, pergelle **AB = a** uzunluğunu işaretle (B noktası).
2 **A** 'dan **AB'ye dik** bir doğru çiz (Örnek 4 yöntemi).
3 **B** 'den de **AB'ye dik** bir doğru çiz.
4 Pergeli **a** uzunluğuna aç. **A** merkezli yay çiz → A'dan dikme üzerinde **D** 'yi işaretle (AD = a).
5 Aynı yarıçapla **B** merkezli yay çiz → B'den dikme üzerinde **C** 'yi işaretle (BC = a).
6 Çizgeçle **D–C** 'yi birleştir.
7 **ABCD karesidir** : tüm kenarlar = a, tüm açılar 90°.

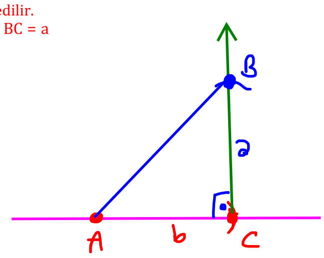


Örnek...15 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla dik kenarları verilen bir dik üçgen inşa ediniz

1 Verilen dik kenarlar **a** ve **b** olsun.
2 Doğru üzerine **A** 'yı koy. Pergeli **b** uzunluğuna aç; **C** 'yi işaretle (AC = b).
3 **C** noktasından **AC'ye dik** doğru çiz (Örnek 4 yöntemi).
4 Pergeli **a** uzunluğuna aç. **C** merkezli yay çiz → dikme üzerinde **B** 'yi işaretle (BC = a).
5 Çizgeçle **A–B** 'yi birleştir → hipotenüs elde edilir.
6 **ABC dik üçgenidir** : ∠C = 90°, dik kenarlar BC = a ve AC = b.
Hipotenüs: $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Pisagor teoremi)

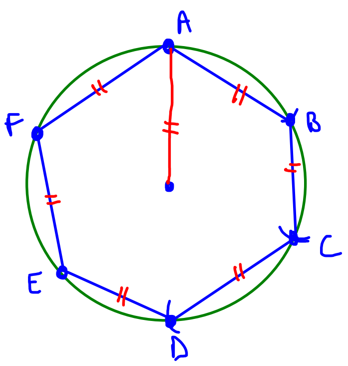




Örnek...16 :

Pergel ve çizgeç yardımıyla kenar uzunluğu verilen düzgün altıgeni inşa ediniz. Düzgün altıgen yardımıyla ölçüleri özel olan açılardan hangilerinin inşası mümkün olabilir?

1 Bir **O** merkezi ve **r** yarıçaplı çember çiz.
2 Çember üzerinde keyfi bir **A** noktası seç.
3 Pergeli **r** yarıçapında tut. A'dan başlayarak çember üzerinde arka arkaya **6 eşit yay** çiz → B, C, D, E, F noktaları elde edilir.
4 Bu 6 noktayı çizgeçle sırasıyla birleştir.
5 **ABCDEF düzgün altıgenidir** . Her kenar = r.



Altıgen yardımıyla inşa edilebilecek özel açılar:
Düzgün altıgenin merkez açısı = **360°/6 = 60°**
- **60°**: İki komşu köşenin merkez açısı
- **30°**: 60° açısının açıortayı (Örnek 6 yöntemi ile)
- **120°**: İki merkez açısı → 2×60°
- **90°**: Dik açı (Örnek 4/3 yöntemi)
- **45°**: 90° açısının açıortayı
- **15°**: 30° açısının açıortayı

Yani: **15°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°** ve bunların katları inşa edilebilir.

Bir miras-vasiyet hikayesi

Matbaz -"Gemini, Gauss 17gen çizimi hikayesi nedir ? "

Gemini -"Matematik dünyasında **"Matematikçilerin Prensi"** olarak anılan Carl Friedrich Gauss'un hikayesi, aslında bir 17-gen (heptadekayon) çizimiyle başlar. Bu olay, sadece bir geometri problemi değil, genç bir dehanın kariyer rotasını belirleyen kırılma noktasıdır.

İşte 2000 yıllık bir sessizliği bozan o hikaye:

1. Antik Yunan'dan Kalan Boşluk

Öklid döneminden beri matematikçiler, pergel ve çizgeç kullanarak hangi düzgün çokgenlerin çizilebileceğini biliyorlardı: **3 (eşkenar üçgen), 4 (kare), 5 (düzgün beşgen)** ve bunların katları (6, 8, 10, 15...). Ancak 2000 yıl boyunca hiç kimse, örneğin düzgün bir 7-gen veya 17-genin sadece bu iki araçla çizilip çizilemeyeceğini kanıtlayamamıştı. Genel kanı, bunların imkansız olduğu yönündeydi.

2. Genç Gauss'un Kararsızlığı

1796 yılında, henüz 19 yaşında olan Gauss, üniversite eğitimi için iki yol arasında kalmıştı: **Filoloji** (dil bilimi) mi yoksa **Matematik** mi? Gauss diller konusunda da bir dahiydi ancak 30 Mart sabahı yatağından kalktığında, zihninde şimşekler çaktı.

3. Cebirsel Devrim

Gauss, sorunu geometrik bir çizim olarak değil, bir **cebir problemi** olarak ele aldı. Karmaşık sayıları ve trigonometriyi kullanarak, düzgün bir 17-genin çizilebilir olması için $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ değerinin sadece karekökler cinsinden ifade edilebilmesi gerektiğini anladı. Ve o sabah, bu değeri hesaplamayı başardı.

Bulduğu formül şuna benziyordu (oldukça ürkütücü ama bir o kadar zariftir):

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \dots$$

Bu formülün sadece kareköklerden (ikinci dereceden köklerden) oluşması, pergel ve çizgeçle inşanın **mümkün** olduğu anlamına geliyordu.

4. Sonuç ve Miras

Gauss bu keşfiyle o kadar gurur duydu ki, o gün matematikçi olmaya kesin karar verdi. Hatta günlüğüne (ünlü *Notizen*) attığı ilk önemli not budur.

Vasiyeti:

Gauss, ölümünden sonra mezar taşına düzgün bir 17-gen kazınmasını istedi. Ancak mezar taşını yapan usta, 17-genin dışarıdan bakıldığında neredeyse bir daireye benzeyeceğini, bu yüzden kimsenin farkı anlamayacağını söyleyerek bu talebi reddetti. Sonunda, Gauss'un doğduğu şehir olan Braunschweig'deki anıtının kaidesine, 17 köşeli bir **yıldız** (stella decemseptangula) kazındı.

Gauss'un Genel Kuralı

Gauss sadece 17-geni çözmekle kalmadı, genel bir kural da koydu: Bir düzgün n-genin çizilebilmesi için n sayısının **Fermat asalları** ($F_n=2^{2^n}+1$ türündeki sayılardır) cinsinden ifade edilebilmesi gerekir.

- n=3 elde edilebilir ($F_0=2^{2^0}+1=3$)
- n=5 ($F_1=2^{2^1}+1=5$)
- n=17 ($F_2=2^{2^2}+1=17$)
- n=257 ve n=65537 de bu kurala göre çizilebilir!