

SONLU SAYI ÖRÜNTÜLERİ

Doğadaki ve günlük yaşamdaki tekrarlayan düzenler (ritimler, rutinler ve şekiller), olayları anlamlandırmamızı ve geleceği öngörmemizi sağlar. İnsan zihni, bu somut gözlemleri daha iyi kavrayabilmek adına matematiksel soyutlamalara başvurur. Bu disiplinin en somut uygulama alanlarından biri olan kriptoloji, sayı ve şekil örüntülerini kullanarak bilgi güvenliğini sağlar. Örüntülerin formülize edilmesi (genellenmesi), hem karmaşık şifrelerin çözülmesine hem de güvenli yeni sistemlerin kurulmasına olanak tanır.

Temel Kavramlarla Akış

Gözlem: Yaşamdaki düzenli tekrarlar.

Araç: Matematiksel modelleme ve soyutlama.

Uygulama: Kriptolojide şifreleme ve deşifre süreçleri.

Sonuç: Örüntü analizi sayesinde tahmin ve güvenlik kabiliyeti.

Örüntü soruları, belirli bir kurala göre dizilen sayılar veya şekiller arasındaki ilişkiyi bulmamızı sağlar.

Aritmetik Örüntüler (Toplama ve Çıkarma)
Bu örüntülerde sayılar her adımda sabit bir miktarda artar veya azalır.

Örnek...1 :

7, 12, 17, 22,... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,
a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sayılar 5'er 5'er artmaktadır. $22 + 5 = 27$.

b) n. terim (Genel Kural): Artış miktarı 5 olduğu için kural $5n$ ile başlar. $n=1$ için $5 \cdot 1 = 5$ 'tir; 7 elde etmek için 2 eklemeliyiz. Kural: $5n + 2$. diğer terimler için sağlamasını yaptıktan sonra genellememizi $5n+2$ olarak tamamlarız

Örnek...2 :

80, 72, 64, 56, ... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,
a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sayılar 8'er 8'er azalmaktadır. $56 - 8 = 48$.

b) n. terim (Genel Kural): Azalış miktarı 8 olduğu için kural $-8n$ ile başlar. $n=1$ için $-8 \cdot 1 = -8$ 'dir; 80 elde etmek için 88 eklemeliyiz. Kural: $88 - 8n$

Geometrik Örüntüler (Çarpma ve Bölme)
Bu örüntülerde sayılar belirli bir kat sayı ile çarpılarak veya bölünerek ilerler.

Örnek...3 :

3, 6, 12, 24, ... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,
a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sayılar 2 ile çarpılarak ilerler. $24 \cdot 2 = 48$.

b) n. terim (Genel Kural): İlk terim 3 ve ortak çarpan 2'dir. Kural: $3 \cdot 2^{n-1}$

Örnek...4 :

162, 54, 18, ... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,
a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sonraki terim: Sayılar 3'e bölünerek ilerler. $18 / 3 = 6$.

b) n. terim (Genel Kural): İlk terim 162 ve her adımda 1/3 ile çarpılır. Kural: $162 \cdot 3^{1-n}$

Kademeli Artış Gösteren Örüntüler
Artış miktarının kendisi de bir kurala göre değişebilir.

Örnek...5 :

1, 2, 4, 7, 11, 16,... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,

a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sonraki terim: Artış miktarları sırasıyla +1, +2, +3, +4, +5 şeklindedir. Bir sonraki artış +6 olacaktır. $16 + 6 = 22$.

b) n. terim (Genel Kural): Bu bir ikinci derece örüntüdür. Kural: $(n^2 - n + 2) / 2$.

Karesel ve Küpsel Örüntüler
Sayıların kareleri veya küpleri üzerinden giden, mantık yürütme gerektiren dizilerdir.

Örnek...6 :

1, 4, 9, 16, 25, ... sayı dizisi veriliyor. Buna göre,
a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sonraki terim: Sayılar sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5 sayılarının kareleridir. Bir sonraki 6'nın karesi olan 36'dır.

b) n. terim (Genel Kural): Doğrudan terim numarasının karesidir. Kural: n^2

Özel Bir Örnek: Fibonacci Dizisi
Doğada sıklıkla karşımıza çıkan, her sayının kendinden önceki iki sayının toplamı olduğu ünlü bir örüntüdür.

Örnek...7 :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... sayı dizisi veriliyor.

Buna göre,

- a) dizideki bir sonraki terim kaçtır?
b) dizinin n. elemanının n türünden eşiti nedir?

a) Sonraki terim: Her sayı kendinden önceki ikisinin toplamıdır. $8 + 13 = 21$.

b) n. terim (Genel Kural): $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ olarak ifade edilir ($F(1)=1, F(2)=1$).

Özet Tablo: Örüntü Çözme Stratejisi

Yöntem	Ne Yapmalı?	Örnekler
Farklara Bak	Sayılar arasındaki fark sabit mi? (+2, -3 vb.)	1,5,9,13,... 12,8,4,0,...
Oranlara Bak	Sayılar birbirinin katı mı? (* 5, : 8 vb.)	3,6,12,24,... 3600,1200,400,...
Değişen Farklar	Farklar kendi içinde artıyor mu? (+1, +2, +3 vb.)	7,8,10,13,16,...
Terim Numarası	Sayı, bulunduğu sıra ile ilişkili mi? ($n^3, 3n+1$ vb.)	2,3,6,11,18,27,...

Örnek...8 :

Üç arkadaş olan Alper, Barkut ve Cankat yaz tatili için kitap okuma hedefi koymuşlardır.

- Alper: Her gün sabit 5 sayfa kitap okuyacaktır.
- Barkut: İlk gün 10 sayfa, sonraki her gün bir önceki günden 3 sayfa fazla okuyacaktır.
- Cankat: İlk gün 20 sayfa okuyacak, ancak her gün okuduğu sayfa sayısını 2 sayfa azaltacaktır.

Buna göre, üç arkadaşın 5. günün sonunda okudukları toplam sayfa sayısı kaçtır?

Alper: Her gün 5 sayfa. 5 gün sonunda: $5 * 5 = 25$ sayfa.

Barkut: 10, 13, 16, 19, 22. Toplam: $10+13+16+19+22 = 80$ sayfa.

Cankat: 20, 18, 16, 14, 12. Toplam: $20+18+16+14+12 = 80$ sayfa.

Toplam: $25 + 80 + 80 = 185$ sayfa

Örnek...9 :

Bir salonda masalar tek sıra ve ardışık sayıda dizilmiştir. Aşağıda sırasıyla 1,2 ve 3 masa olması durumunda yerleşimler verilmiştir.



Masa ile oturabilen en çok kişi sayısı arasında şekildeki örüntüye göre:

- a) 4 masa olduğunda en çok kaç kişi oturabilir ?
b) n masa olduğunda en çok kaç kişi oturabilir ?

a) : 1 masa 6 , 2 masa 8, 3 masa 10 kişi ise (her masa 2 kişi ekliyor);
4 masa için $10 + 2 = 12$ kişi.

b) n masa: Kural $2n$ ile başlar. $n=1$ için $2*1=2$; 6 elde etmek için 4 eklenir. Kural: $2n + 4$

Örnek...10 :

Bir güvenlik görevlisi 5 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini ayın 3. günü tuttuğuna göre, 4. nöbetini ayın kaçınıncı günü tutar?

. 4. nöbet için 3 nöbet aralığı kadar gün aralık geçer ($3 * 5 = 15$ gün sonra).
 $3 + 15 = 18$. gün tutar.

Örnek...11 :

Bir doktor 3 günde bir nöbet tutmaktadır. İlk nöbetini 1 Ocak'ta tutan bu doktor, Ocak ayı içerisinde (Ocak 31 gündür) toplam kaç nöbet tutar?

Nöbet günleri: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31. Toplam: 11 nöbet.
 $1+3n \leq 31$ eşitsizliğinin doğal sayı çözümleri kadar.

Örnek...12 :

Bir polis memuru 6 günde bir nöbet tutmaktadır. 1. nöbetini yılın 10. gününde tuttuğuna göre, 10. nöbetini yılın kaçınıncı gününde tutar?

10. nöbet için 9 aralık geçer ($9 * 6 = 54$ gün sonra). $10 + 54 = 64$. gün tutar.

Örnek...13 :

İlk nöbetini yılın 5. gününde tutan ve 4 günde bir nöbet tutan birinin n. nöbetinin gününü veren genel kuralı yazınız.

İlk gün 5, artış 4. Kural: $4n + 1$.

Örnek...14 :

M1 metro hattı ile ilgili şu bilgiler verilmiştir:

- İlk Sefer: Her sabah saat 06.30'da başlamaktadır.
- Sefer Aralığı: Metro her 12 dakikada bir kalkmaktadır.
- Son Sefer: Gece saat 00.18'dedir.

Buna göre:

- a) Bu metro hattında günün 5. seferi saat kaçta yapılır?
b) Saat 09.45'te durağa gelen bir yolcu, en az kaç dakika bekleyerek bir sonraki metroya binebilir?

a) 5. sefer: İlk sefer 06.30. 4 aralık geçer ($4 * 12 = 48$ dk). $06.30 + 48$ dk = 07.18.

b) 09.45'te gelen yolcu: 06.30'dan 09.45'e kadar 195 dakika geçmiştir. $195 / 12 = 16$ (kalan 3). 16 sefer yapılmış, 17. sefer 3 dk önce gitmiş. 18. sefer için kalan süre: $12 - 3 = 9$ dakika.

Örnek...15 :

Başlangıç kalınlığı 0,2 mm olan bir kağıt 3 kez üst üste ikiye katlanırsa son kalınlık kaç mm olur?

3 kez katlanırsa $2^3 = 8$ katman olur. $0,2 * 8 = 1,6$ mm

Örnek...16 :

Bir kağıt n defa ikiye katlandığında oluşan toplam katman sayısı hangi formülle ifade edilir?

n defa katlanırsa katman sayısı: 2^n

Örnek...17 :

Aşağıda verilen şekilde, 40 koltuklu bir otobüsteki koltuk numaralarının nasıl düzenlendiği gösterilmiştir. Yan yana her iki koltuk cam kenarı ve koridor olarak ifade edilmektedir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- a) 23 numaralı koltuğun hangi konumda olduğunu bulunuz.
b) Konumları cam kenarlarında olan koltukların numaralarını veren iki ayrı sayı örüntüsünün kuralını yazınız.

23 numara: Koltuklar 4'lü sıralanmıştır. $23 / 4 = 5$ (kalan 3). 6. sırada koridor tarafındadır. (direksiyon-wc doğrultusu aracın gidiş yönüne göre sağ taraf)

Cam kenarı kuralı: Aracın gidiş yönüne göre sol cam (1, 5, 9...): kural : $4n - 3$.
Direksiyon hizası----> sağ cam (4, 8, 12...): $4n$.---->Sağ cam (4, 8, 12...): kural : $4n$

Örnek...18 :

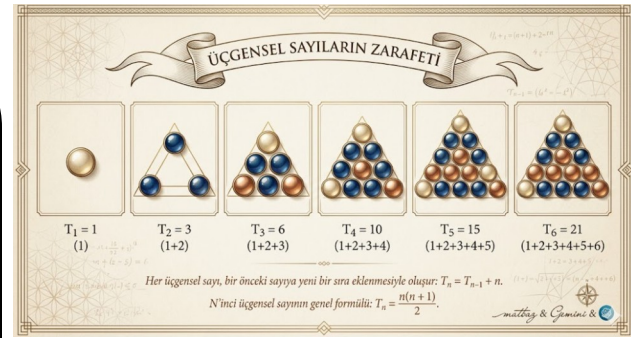
Üçgensel sayılar, 1'den başlayarak ardışık doğal sayıların toplamı şeklinde ifade edilen ve noktalarla gösterildiğinde bir **eşkenar üçgen** biçimi oluşturan sayılardır.

Basit bir ifadeyle; bir sıra için 1 nokta, altına 2 nokta, onun altına 3 nokta ekleyerek devam ettiğinizde oluşan toplam nokta sayısı bir üçgensel sayıdır.

İlk Birkaç Üçgensel Sayı

- 1. sayı: 1
- 2. sayı: $1 + 2 = 3$
- 3. sayı: $1 + 2 + 3 = 6$
- 4. sayı: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
- 5. sayı: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Bu dizi **1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55...** şeklinde sonsuza kadar gider.



a) Baştan n. üçgensel sayıyı veren cebirsel ifadeyi n sayısına bağlı nasıl elde edilir?

b) **Tokalaşma Problemi:** Bir odadaki n kişinin birbiriyle birer kez tokalaşması durumunda toplam tokalaşma sayısı problemi olarak bilinir. Üçgensel sayılarla tokalaşma problemini nasıl ilişkilendiririz?

c) Üçgensel sayıların **Karesel Sayılarla** (1,4,9,16,... sayı dizisi) ilişkisini açıklayınız

a) Cebirsel ifade: $T(n) = n * (n + 1) / 2$.

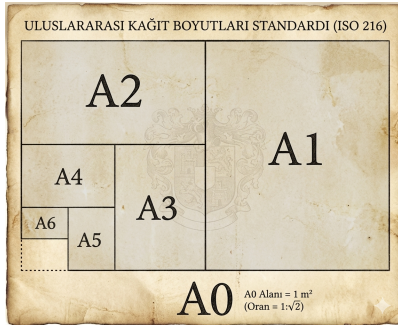
b) Tokalaşma: n kişi birbiriyle tokalaşınca toplam tokalaşma sayısı $n > 1$ için $T(n-1)$ yani $n * (n - 1) / 2$ 'dir.

c) Karesel sayılarla ilişki: Ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir karesel sayıyı verir.
 $T(n) + T(n-1) = n^2$

Örnek...19 :

Yazışma, matbaa ve dijital baskıda kullanılan kağıtlar için uluslararası bir standart vardır. Bu sistemde her kağıt bir kodla adlandırılır. A0'ın alanı 1 m^2 , A1'in alanı $0,5 \text{ m}^2$ 'dir. Diğer boyutlar ise bir öncekinin alanının yarısı alınarak belirlenir.

- a) Yukarıdaki durumu özetleyen bir şekil çiziniz.
- b) Bir matbaacı, elindeki 1 adet A0 kağıdını keserek daha küçük boyutlu kağıtlar elde etmek istiyor. Matbaacı kağıdı şu şekilde parçalıyor:
- Kağıdın yarısını ayırıp A1 olarak bırakıyor.
 - Kalan yarısını tekrar ikiye bölüp birini A2 yapıyor.
 - Bu işlemi kağıtlar A6 boyutuna gelene kadar devam ettiriyor.
- Buna göre, 1 adet A0 kağıdından toplam kaç adet A6 kağıdı elde edilebilir?
- c) A_n kağıdının alanını n cinsinden veren matematiksel ifadeyi yazınız.
- d) Bir tasarım ofisi, bir proje için şu kağıt listesini sipariş etmiştir:
- 2 adet A2
 - 4 adet A3
 - 8 adet A4
- Bu sipariş edilen tüm kağıtlar birleştirildiğinde, toplam alan kaç adet A1 kağıdının alanına eşit olur?
- e) A0 kağıdının alanı $1=2^0 \text{ m}^2$ olarak kabul edilirse; A1 alanı 2^{-1} m^2 , A2 alanı 2^{-2} m^2 olacaktır. Buna göre, alanı 2^{-10} m^2 olan kağıdın kod adı nedir?



ISO 216 standardına göre A serisi kağıtlar, uzun kenarın kısa kenara oranının $\sqrt{2}$ olduğu bir sistemdir. Bu sayede kağıdı ikiye böldüğümüzde oran hiç bozulmaz. Aşağıdaki görsel, bir A0 kağıdının nasıl parçalara ayrıldığını net bir şekilde özetler:

b) soruyu 1 A0 kaç A6 ya dönüştür olarak okursak cevap $64=2^6$ olacaktır. bunu yaparken $A_6=1$ br alırsak $A_4=2$ br $A_2=4$ br ve $A_8=8$ br olacağını görüp alanlar oranından yapabiliriz.

b şıkkı için yazılan şekilde düşünersek :

Matbaacının izlediği yolu matematiksel olarak takip edelim:

A0'ın yarısını ayırdı: Elinde 1 tane A1 var, kalan kısım A1 boyutunda.

Kalan A1'i ikiye böldü: Elinde 1 tane A2 var, kalan kısım A2 boyutunda.

Kalan A2'yi ikiye böldü: Elinde 1 tane A3 var, kalan kısım A3 boyutunda.

Kalan A3'ü ikiye böldü: Elinde 1 tane A4 var, kalan kısım A4 boyutunda.

Kalan A4'ü ikiye böldü: Elinde 1 tane A5 var, kalan kısım A5 boyutunda.

Son adım: Elinde kalan son A5 parçasını da ikiye böldüğünde, her iki parça da A6 boyutunda olur.

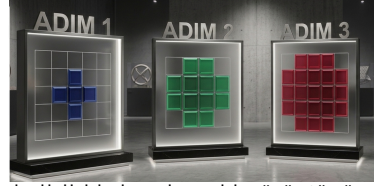
Bu durumda, 1 adet A0 kağıdından bu yöntemle toplamda 2 adet A6 kağıdı elde edilir. (Diğer parçalar A1, A2, A3, A4 ve A5 olarak kalmıştır.)

c) Kağıt boyutu her bir adımda $(n$ arttıkça) yarıya düştüğü için bu bir geometrik dizidir.

A0'ın alanı 1 metrekare ise, n . basamaktaki kağıdın alanı $A(n)=2^{-n}$ metrekaredir

d) Sipariş listesindeki kağıtları A1 birimine çevirelim: 2 adet A2: Her bir A2, bir A1'in yarısıdır. $2 \cdot 0,5 = 1$ adet A1 4 adet A3: Her bir A3, bir A1'in dörtte biridir. $4 \cdot 0,25 = 1$ adet A1 8 adet A4: Her bir A4, bir A1'in sekizde biridir. $8 \cdot 0,125 = 1$ adet A Toplam Alan: $1 + 1 + 1 = 3$ adet A1 kağıdının alanına eşittir.

e) c şıkkında bulduğumuz formülü uygulayalım: Soruda verilen alan 2^{-10} metrekare olarak belirtilmiş. Formülümüz: $\text{Alan}(A_n) = 2^{-n}$ Burada $2^{-n} = 2^{-10}$ olduğuna göre: $n = 10$ Bu kağıdın kod adı A10'dur.

Örnek...20 :

yukarıda belirli bir kurala sahip örüntünün ilk 3 adımı verilmiştir. Buna göre

- a) 4. adımda oluşacak şekilde kaç boyanmış kare vardır?
b) n. adımda oluşacak şekilde kaç boyanmış kare vardır?

a) Şekillerde $n \cdot n$ lik karelerin köşelerindeki karelerin silinmesiyle oluşturulmuş şekiller mevcut

Adım1 de $3 \cdot 3$ lük karenin 4 köşesinden birer tane kare çıkarılmış

Adım2 de $4 \cdot 4$ lük karenin 4 köşesinden birer kare çıkarılmış ve bu şekilde devam edilmiştir. buna göre 4. adımda $6 \cdot 6$ lük karenin köşelerinden 1'er tane kare çıkarılır ve boyanmış kare sayısı $36-4=32$ olur

b) n. adımda $(n+2) \cdot (n+2)$ lik karelerden 4 kare çıkarılarak boyalı kareler elde edileceğinden toplam boyalı kare sayısı $(n+2)^2-4$ olur