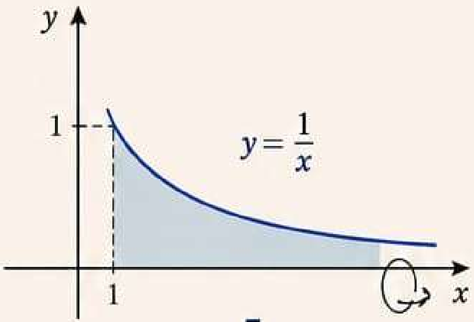
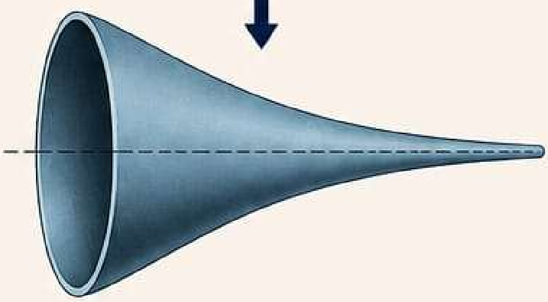
GABRIEL'İN BORUSU
(TORICELLI BORUSU)

Matematiğin en büyüleyici ve sağduyuya aykırı paradokslarından biridir.

NASIL OLUŞUR?

Bu şekil, $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun ($x \geq 1$ için) x-ekseni etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilir.





Ortaya çıkan nesne, ağzı geniş başlyan ve sonsuza doğru gittikçe daralan bir boru veya huniye benzer.

PARADOKSUN ÖZÜ

Bu borunun içine sonlu miktarda boya sığar, ancak dış yüzeyini boyamak için sonsuz miktarda boyaa gerekir!

İçini doldurmak mümkün. Çünkü hacmi sonludur (π).

Dışını boyamak imkânsız. Çünkü yüzey alanı sonsuzdur.

Matematik, sezgimizin ötesinde bir dünyadır!

MATEMATİKSEL PARADOKS

Kalkülüs yöntemlerini (integral) kullanarak bu şeklin özelliklerini hesapladığımızda şaşırtıcı bir sonuçla karşılaşırız:

1. İÇİNE SIĞAN BOYA (HACİM) SONLUDUR!

Hacim, disk (yıkama) yöntemiyle bulunur.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \\
&= \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} \\
&= \pi\,(0 - (-1)) = \pi
\end{aligned}
$$

SONUÇ:
İç hacim sonludur ve değeri π'dir.

Yani bu borunun içine tam olarak π birim^3 boya koyabiliriz.

2. DIŞ YÜZEYİNİ BOYAMAK İÇİN GEREKEN BOYA SONSUZDUR!

Dış yüzey alanı, yüzey alanı formülüyle bulunur.

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$y = \frac{1}{x} \implies y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$S = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$S \sim 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

(x büyük için $\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \approx 1\right)$)

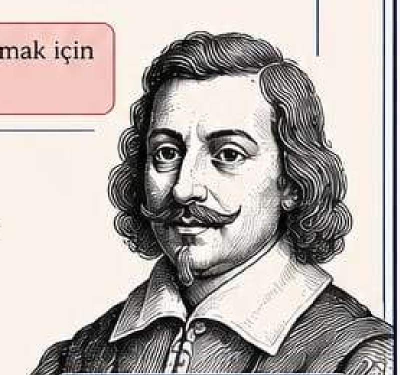
$$S = 2\pi\,[\ln x]_1^{\infty} = \infty$$

SONUÇ:
Dış yüzey alanı **sonsuzdur!**

Yani dış yüzeyini tamamen boyamak için **sonsuz** miktarda boya gerekir.

"Doğa, matematik ile yazılmıştır."

– Galileo Galilei



Evangelista Torricelli (1608–1647)

SONUÇ: SONLU HACİM, SONSUZ YÜZEY ALANI!
GABRIEL'İN BORUSU, MATEMATİĞİN EN ETKİLEYİCİ PARADOKSLARINDAN BİRİDİR.