

## ÜSTLÜ İFADELER

a bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere, n tane a'nın çarpımına a'nın n. kuvveti denir ve  $a^n$  olarak ifade edilir.  
 $a^n = b$  üstlü ifadesinde a ya **taban**, n ye **üs**, b ye ise üstlü ifadenin değeri denir.

Örneğin;  $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$  dir.

## Örnek...1 :

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 + 2$   
işleminin sonucu kaçtır?

$$2^6 + 2 \cdot 4 = 64 + 8 = 72$$

## ÜSTLÜ İŞLEMLERİN ÖZELLİKLERİ

- 1)  $a \neq 0$  için  $a^0 = 1$  dir.  
 Her a reel sayısı için  $a^1 = a$  dir.  
 $x \neq 0$  için  $0^x = 0$  dir.  
 $0^0$  ifadesi **tanımsızdır**.

## UYARI

$(-5)^2 = 25$  iken  $-5^2 = -25$  tir.  
 $a < 0$  için  $a^{\text{ÇİFT}} > 0$  olur.  $\{ (-5)^2 = 25 \text{ gibi} \}$   
 $a < 0$  için  $a^{\text{TEK}} < 0$  olur.  $\{ (-5)^3 = -125 \text{ gibi} \}$

## Örnek...2 :

$(-2)^2 + 4^2 - (-3)^2 + 1^{234} - 0^{567} = ?$

$$-8 + 16 - 9 + 1 - 0 = 8 - 8 = 0$$

## NEGATİF KUVVET (ÜS)

2)  $(a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$  veya  $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$  dir.

Örneğin;  $(5)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

## Örnek...3 :

$(-5)^2 - 7^2 - 36 \cdot (-3)^{-2} + 12^0 - (-4)^3 = ?$

$$25 - 49 - \frac{36}{9} + 1 + 64$$

$$-24 - 4 + 65 = 37$$

## Örnek...4 :

$\frac{1^{100} + 1^{101} + \dots + 1^{126}}{(-1^{-67}) + (-1^{-66}) + \dots + (-1^{-42})} = ?$

$$\frac{1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 + 1}{-1 + (-1) + (-1) + \dots + (-1)} = \frac{26 \cdot 1}{26 \cdot (-1)} = -1$$

## ÇARPMA BÖLME İŞLEMİ

3)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

4)  $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5)  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6)  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

## Örnek...5 :

$x = -2$  ve  $y = 3$  olmak üzere  $x^y - y^x - x \cdot y = ?$

$$-2^3 - 3^{-2} - (-2) \cdot 3 = -8 - \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{-72 - 1 + 6}{9} = -\frac{67}{9}$$

## Örnek...6 :

m ve k tamsayılar ve k'nın en büyük değeri için,  $(-x)^3 \cdot (-x)^{-8} \cdot (x^2)^3 = m \cdot x^k$  ise m+k kaçtır?

$$(-x)^{-5} \cdot x^6 = -x^1 = m \cdot x^k \rightarrow k = 1$$

$$+ m = -1$$

$$m + k = 0$$

## Örnek...7 :

$\frac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \dots 3}^{8 \text{ tane}}}{\underbrace{3 + 3 + 3 + \dots + 3}_{2187 \text{ tane}}}$  ifadesinin eşiti nedir?

$$\frac{3^8}{3 \cdot 2187} = \frac{3^8}{3 \cdot 3^7} = \frac{3^8}{3^8} = 1$$

## Örnek...8 :

$\frac{0,0006^3}{0,00002^4}$  sayısı kaç basamaklıdır?

$$\frac{(6 \cdot 10^{-4})^3}{(2 \cdot 10^{-5})^4} = \frac{6^3 \cdot 10^{-12}}{2^4 \cdot 10^{-20}} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 10^8}{2^4 \cdot 135} = \frac{5 \cdot 3^3 \cdot 10^7}{135}$$

3 + 7 = 10 basamaklı

Örnek...9 :

128<sup>8</sup> sayısının yarısı kaçtır?

$$\frac{128^8}{2} = \frac{(2^7)^8}{2} = \frac{2^{56}}{2} = 2^{55}$$

diğerine!

Örnek...10 :

$$\frac{0,9^{-25}}{0,81^{-4}} = ? \quad \frac{(3^2 \cdot 10^{-2})^{-25}}{(3^4 \cdot 10^{-2})^{-4}} = \frac{3^{-50} \cdot 10^{50}}{3^{-16} \cdot 10^8} = \frac{3^{34} \cdot 10^{42}}{10^3}$$

## TOPLAMA ÇIKARMA İŞLEMİ

$$7) k \cdot a^n + m \cdot a^n - n \cdot a^n = a^n(k+m-n)$$

Örnek...11 :

6 · 2<sup>x-3</sup> + 3 · 2<sup>x-2</sup> - 2<sup>x</sup> = 512 ise x kaçtır?

$$2^x(6 \cdot 2^{-3} + 3 \cdot 2^{-2} - 1) = 512$$

$$2^x \left( \frac{6}{8} + \frac{3}{4} - 1 \right)$$

$$2^x \cdot \frac{1}{2} = 2^9 \rightarrow 2^{x-1} = 2^9 \rightarrow x = 10$$

## KUVVETİN KUVVETİ

$$8) (a^n)^m = a^{n \cdot m} \text{ dir.}$$

$$\text{ⓐ} : a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} \neq a^{n^m}$$

Örnek...12 :

(3<sup>3</sup>)<sup>3</sup> + 3<sup>(2<sup>3</sup>)</sup> toplamının eşiti kaçtır?

$$3^6 + 3^8 = 729 + 6561 = 7290$$

Örnek...13 :

(2<sup>-2</sup>)<sup>-3</sup> + 7<sup>0</sup> + 1<sup>-1000</sup> = ?

$$2^6 + 7^0 + 1^{-1000} = 64 + 1 + 1 = 66$$

Örnek...14 :

32<sup>34</sup> · 25<sup>87</sup> sayısı kaç basamaklıdır?

$$(2^5)^{34} \cdot (5^2)^{87} = 2^{170} \cdot 5^{174}$$

$$= 54 \cdot 10^{170} = 625 \cdot 10^{170}$$

$$0 + 170 = 173 \text{ basamaklı}$$

Örnek...15 :

4 · x<sup>12y</sup> + 5 · (x<sup>3</sup>)<sup>4y</sup> - 7(x<sup>2</sup>)<sup>6y</sup> = m · x<sup>n·y</sup> olduğuna göre, m · n çarpımı kaçtır?

$$4 \cdot x^{12y} + 5 \cdot x^{12y} - 7 \cdot x^{12y} = m \cdot x^{ny}$$

$$x^{12y}(4+5-7) = x^{12y} \cdot 2 = m \cdot x^{ny}$$

$$n=12 \quad m=2$$

$$m \cdot n = 24$$

Örnek...16 :

5<sup>x</sup> = p ise 5<sup>2x+3</sup> sayısının p türünden eşiti nedir?

$$5^x = p \Rightarrow 5^{2x+3} = 5^{2x} \cdot 5^3 = (5^x)^2 \cdot 5^3$$

$$= p^2 \cdot 5^3$$

$$= 125p^2$$

Örnek...17 :

3<sup>x-2</sup> = a ise  $\left(\frac{1}{81}\right)^{3-x}$  sayısının a türünden eşiti nedir?

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{3-x} = (3^{-4})^{3-x} = 3^{4x-12} = 3^{4(x-2)} \cdot 3^{-4}$$

$$= (3^{x-2})^4 \cdot 3^{-4}$$

$$= a^4 \cdot 3^{-4}$$

$$= \left(\frac{a}{3}\right)^4$$

Örnek...18 :

3<sup>x</sup> = k, 5<sup>x</sup> = n ise 2025<sup>x</sup> in k ve n cinsinden değeri nedir?

$$2025^x = (3^4 \cdot 5^2)^x = (3^4)^x \cdot (5^2)^x$$

$$= k^4 \cdot n^2$$

## ÜSTLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

$$9) a^n = a^m \text{ ise } n = m \text{ dir.}$$

Örnek...19 :

2<sup>4x-3</sup> = 128<sup>x-2</sup> ise x kaçtır?

$$2^{4x-3} = (2^7)^{x-2}$$

$$4x-3 = 7x-14 \rightarrow 3x = 11 \rightarrow x = 11/3$$

Örnek...20 :

 $49^{4-2x} = 343^{x-2}$  ise  $x$  kaçtır?

$$(7^2)^{4-2x} = (7^3)^{x-2}$$

$$8-4x = 3x-6 \rightarrow 7x=14$$

$$x=2$$

Örnek...21 :

 $7^a = 5^b$  ise  $(343)^{\frac{a}{b}}$  nin değeri kaçtır?

$$343 = (7^3)^{\frac{a}{b}} = (7^a)^{\frac{3}{b}} = (5^b)^{\frac{3}{b}} = 5^3$$

$$= 125$$

Örnek...22 :

 $4a = b$  ve  $a^b = 27^4$  ise  $a-b$  kaçtır?

$$a^4 = 27^4 \quad a^b = 27^4 = 3^3 \Rightarrow a=3$$

$$\downarrow$$

$$b=12$$

$$a-b = 3-12$$

$$= -9$$

## ÜSTLÜ İFADE EŞİTLİĞİ

10)  $a^n = b^n$  ise  $n$  tekse  $a=b$ ,  
 $n$  çiftse  $|a|=|b|$ 

Örnek...23 :

 $(4x-1)^3 = (3x+2)^3$  ise  $x$  kaç olabilir?

$$4x-1 = 3x+2 \Rightarrow x=3$$

Örnek...24 :

 $(2x+1)^2 = (x-2)^2$  ise  $x$  kaç olabilir?

$$|2x+1| = |x-2| \begin{cases} 2x+1 = x-2 \rightarrow x = -3 \\ 2x+1 = -x+2 \rightarrow x = 1/3 \end{cases}$$

## ÜSTLÜ İFADE EŞİTSİZLİĞİ

11)  $a > 1$  ve  $a^x > a^y$  ise  $x > y$  olur.

Örnek...25 :

 $8^{2-5x} < 32^{2x-3}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$(2^3)^{2-5x} < (2^5)^{2x-3}$$

$$6-15x < 10x-15$$

$$21 < 25x$$

$$\frac{21}{25} < x$$

## ÜSTLÜ İFADE EŞİTSİZLİĞİ

12)  $0 < a < 1$  ve  $a^x > a^y$  ise  $x < y$  olur.

Örnek...26 :

 $(\frac{2}{3})^{3x-2} < (\frac{2}{3})^{x+5}$   
eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$3x-2 > x+5$$

$$2x > 7$$

$$x > 7/2$$

SAYILAR - 7

(ÜSTLÜ İFADELER VE ÖZELLİKLERİ - DEĞERLENDİRME)

**Örnek...27 :**  $\left\{ \left( \frac{4}{3} \right)^3 \right\}^{x-1}$   
 $\left( \frac{3}{4} \right)^{5x+1} < \left( \frac{64}{27} \right)^{x-1}$  eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$\left( \frac{3}{4} \right)^{5x+1} < \left( \frac{4}{3} \right)^{3x-3} = \left( \frac{3}{4} \right)^{-3x+3}$$

$$5x+1 > -3x+3 \Rightarrow 8x > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

**13) a<sup>x</sup>=1 ise 3 durum mümkün olabilir.**

- i) a=1 ve x her reel değeri alabilir.
- ii) a = -1 ise x çift tam sayı
- iii) x=0 ise a ≠ 0 yeterlidir.

**Örnek...28 :**

$(x-2)^{x^2-4} = 1$  ise x kaç olabilir?

d1  $x-2=1 \Rightarrow x=3$  ✓  
d2  $x^2-4=0 \wedge x-2 \neq 0$   
 $x=2 \wedge x \neq 2 \Rightarrow x=-2$  ✓  
d3  $x-2=-1 \wedge x^2-4=\text{çift}$   
 $x=1 \wedge x^2-4 \text{ çift (olmuyor)}$   
 $\mathcal{C} = \{3, -2\}$

**14)  $\begin{cases} a^n = b^m \\ a^p = b^r \end{cases}$  ise  $\frac{n}{p} = \frac{m}{r}$  dir.**

**Örnek...29 :**

$5^a = 49$  ve  $5^b = 343$  ise a'nın b türünden değeri nedir?

$$5^a = 7^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$5^b = 7^3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

**Örnek...30 :**

$2^a = 12$  ve  $3^b = 72$  ise a'nın b türünden değeri nedir?

$$2^a = 2^2 \cdot 3 \rightarrow 2^{a-2} = 3^1$$

$$3^b = 2^3 \cdot 3^2 \rightarrow 2^3 = 3^{b-2}$$

$$\frac{a-2}{3} = \frac{1}{b-2} \Rightarrow a-2 = \frac{3}{b-2}$$

$$a = 2 + \frac{3}{b-2} = \frac{2b-1}{b-2}$$

**Örnek...31 :**

$\frac{1}{1+7^x} + \frac{1}{1+7^{-x}} = 1525^{3+y}$  ise y kaçtır?

$$\frac{1}{1+7^x} + \frac{1}{1+\frac{1}{7^x}} = \frac{1}{1+7^x} + \frac{1}{\frac{7^x+1}{7^x}} = \frac{1+7^x}{7^x+1} = 1$$

$$\Rightarrow 1525^{3+y} = 1 \rightarrow 3+y=0$$

$$y = -3$$

**15) Üstlü sayılarda sıralama sorularında üsler veya tabanlar eşitlendikten sonra karşılaştırma yapılarak sıralanırlar.**

**Örnek...32 :**

Aşağıdaki sayıları sıralayınız?

i)  $a = 2^{45}$ ,  $b = 4^{30}$ ,  $c = 8^{11}$   
 $a = 2^{45}$   $b = 2^{60}$   $c = 2^{33}$   
 $b > a > c$

ii)  $x = 7^{60}$ ,  $y = 11^{48}$ ,  $z = 2^{96}$

$$x = (7^5)^{12}$$

$$y = (11^4)^{12}$$

$$z = (2^8)^{12}$$

$$x > y > z$$

## Örnek...33 :

$x^y=16$  olmak üzere, bileşenleri tam sayı olan kaç  $(x,y)$  ikilisi vardır?

$$x^y=16 \rightarrow \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 16 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & 4 \\ -4 & 2 \end{array} \quad 5 \text{ ikili}$$

## Örnek...34 :

$a=3+6^x$  ve  $b=4-6^{-x}$  ise  $a$  nın  $b$  türünden değeri nedir?

$$\begin{aligned} a &= 3+6^x \rightarrow 6^x = a-3 \\ b &= 4-6^{-x} \rightarrow 6^{-x} = 4-b \\ a-3 &= \frac{1}{4-b} \Rightarrow a-3 = \frac{1}{4-b} = \frac{12-3b+1}{4-b} \\ a &= \frac{13-3b}{4-b} \end{aligned}$$

## Örnek...35 :

$6^x-6^{-x}=8$  olduğuna göre,  $36^{-x}+36^x$  toplamı kaçtır?

$$\begin{aligned} [6^x-6^{-x}=8]^2 \\ 36^x - 2 \cdot 6^x \cdot 6^{-x} + 36^{-x} &= 64 \\ 36^x - 2 + 36^{-x} &= 64 \\ 36^x + 36^{-x} &= 66 \end{aligned}$$

## Örnek...36 :

$A=3^2+4^2+5^2$  olduğuna göre,  $15^2+20^2+25^2$  ifadesinin  $A$  türünden eşiti nedir?

$$\begin{aligned} 15^2+20^2+25^2 &= 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5^2 \\ &= 5^2(3^2+4^2+5^2) \\ &= 15 \cdot A \end{aligned}$$

## Örnek...37 :

$x$  ve  $y$  tamsayıları için,  $7^{3x+4y-4}=9^{y+2+x}$  olduğuna göre,  $x \cdot y$  çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} 7^0 &= 9^0 \\ 3x+4y-4 &= 0 \\ -3/y+2+x &= 0 \\ y-4-6 &= 0 \rightarrow y=10 \rightarrow x=-12 \\ -12 \cdot 10 &= -120 \end{aligned}$$

16)  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,  $a^x=b$  eşitliğinde  $b$  nin değerini  $a$  nın iki kuvveti arasına sıkıştırırsak  $x$  in aralığı bulunmuş olur.

## Örnek...38 :

$y$  tamsayısı için,  $3^{x+2} = 111$  ve  $y < x < y+1$  olduğuna göre,  $y$  nin değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} 4 < x+2 < 5 \\ 2 < x < 3 \\ \Downarrow \\ y &= 2 \end{aligned}$$

## Örnek...39 :

$27=5^x$ ,  $1=11^y$ ,  $224=15^z$  ise  $x, y$  ve  $z$  yi sıralayınız.

$$\begin{aligned} 2 < x < 3, \quad y=0, \quad z < 2 \\ y < z < x \end{aligned}$$

## DEĞERLENDİRME

- 1)
- $4^{x-4} = 512^{1-y}$
- ise x in y türünden değeri nedir?

$$(2^2)^{x-4} = (2^9)^{1-y}$$

$$2x-8 = 9-9y$$

$$x = \frac{17-9y}{2}$$

- 2)
- $(2^2)^3 + 2^{(2^2)}$
- toplamının eşiti kaçtır?

$$2^6 + 2^8 = 64 + 256 = 320$$

- 3)
- $(x-2)^4 = (x)^2$
- ise x kaç olabilir?

$$((x-2)^2)^2 = x^2$$

$$|x^2 - 4x + 4| = |x|$$

$$x^2 - 4x + 4 = x \quad \vee \quad x^2 - 4x + 4 = -x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0 \quad \downarrow \text{Çözüm yok!}$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = 1$$

- 4)
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+1} < \left(\frac{64}{27}\right)^{x-1}$
- eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+1} < \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{x-1}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{5x+1} < \left(\frac{3}{4}\right)^{-3x+3}$$

$$5x+1 > -3x+3$$

$$8x > 2$$

$$x > \frac{1}{4} \quad \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$$

- 5)
- $8^x = 25$
- ,
- $125^y = 32$
- ise x.y çarpımı kaçtır?

$$(2^3)^x = 5^2 \quad (5^3)^y = 2^5$$

$$2^{3x} = 5^2 \quad 2^5 = 5^{3y}$$

$$\frac{3x}{5} = \frac{2}{3y} \rightarrow 9xy = 10 \rightarrow xy = \frac{10}{9}$$

- 6)
- $p=3^{48}$
- ,
- $q=9^{23}$
- ,
- $r=27^{17}$
- sayılarını küçükten büyüğe sıralayınız?

$$p = 3^{48}$$

$$q = (3^2)^{23} = 3^{46}$$

$$r = (3^3)^{17} = 3^{51}$$

$$r > p > q$$

- 7)
- $a^b = 64$
- olmak üzere, bileşenleri tam sayı olan kaç (a,b) ikilisi vardır?

2	6
64	1
8	2
4	3
2	6
-2	6
-8	2

6 ikilisi

- 8) x ve y tamsayıları için,
- $5^{x+3y-6} = 6^{2x+y+3}$
- olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

$$-2/x+y-6=0 \quad \leftarrow \text{düzeltme}$$

$$2x+y+3=0$$

$$-5y+15=0 \quad y=3$$

$$x+3-3-6=0 \quad x+3=0 \rightarrow x=-3$$

$$x \cdot y = -9$$