

KÜMELER - 4

(SIRALI İKİLİ VE ÖZELLİKLERİ - KARTEZYEN ÇARPIM VE ÖZELLİKLERİ)

SIRALI İKİLİ

a ve b'nin (a,b) biçiminde tek bir eleman olarak yazılmasına **sıralı ikili** ya da kısaca **ikili** denir. Burada a'ya ikilinin birinci bileşeni, b'ye ise ikinci bileşeni denir.
Örneğin ; (4, -3) ve (m, n) bir sıralı ikilidir.

UYARI

İkilide sıra önemli olduğundan $a \neq b$ için $(a, b) \neq (b, a)$ dir.

UYARI

(a,b) ikilisi ile {a, b} kümesi de farklıdır. Yani,
 $(a,b) \neq \{a,b\}$ dir.

SIRALI İKİLİLERİN EŞİTLİĞİ

İki sıralı ikilinin birinci bileşenleri birbirine ve ikinci bileşenleri birbirine eşitse bu sıralı ikililer eşittir denir. Bunun karşıtı da doğrudur. Yani,

$$(a,b) = (c,d) \text{ ise } (a = c \text{ ve } b = d) \text{ dir.}$$

Örnek...1 :

$(4x-1, y-3) = (19, x^3+x)$ olduğuna göre, (x-y, x+y) sıralı ikilisini bulunuz.

$$\begin{cases} 4x-1=19 \\ y-3=x^3+x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x=20 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-3=5^3+5 \\ y-3=125+5 \\ y-3=130 \\ y=133 \end{cases} \Rightarrow (5-133, 5+133) = (-128, 138) //$$

Örnek...2 :

$$\left(\frac{2}{2x+1}, \frac{3y-1}{3} \right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{3} \right)$$

olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

$$\frac{2}{2x+1} = \frac{3}{5}$$

$$6x+3=10$$

$$6x=7$$

$$x = \frac{7}{6}$$

$$\frac{3y-1}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$9y-3=-12$$

$$9y=-9$$

$$y=-1$$

$$x \cdot y = \frac{7}{6} \cdot (-1)$$

$$x \cdot y = -\frac{7}{6} //$$

Örnek...3 :

$(2x-3y, x+2y) = (-4, -2)$ olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

$$2/ 2x-3y=-4$$

$$3/ x+2y=-2$$

$$4x-6y=-8$$

$$+ 3x+6y=-6$$

$$7x=-14 \text{ ise } x=-2$$

$$x \cdot y = (-2) \cdot 0$$

$$= 0 //$$

$$2 \cdot (-2) - 3y = -4$$

$$-4 - 3y = -4$$

$$-3y = 0$$

$$y = 0$$

KARTEZYEN ÇARPIM

A ve B herhangi iki küme olsun.
 $A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ve } b \in B\}$ kümesine A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı** denir.
 $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$

Örnek...4 :

A = {1, 2, 3} ve B = {a, b} kümeleri için, AxB ve BxA kümelerini liste biçimde yazınız.

$$A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

$$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Örnek...5 :

A = {x : x ∈ Z ve |x| < 2} ve B = {x : x ∈ Z ve x² < 6} kümeleri için, s(A x B) kaçtır?

$$\begin{aligned} s(A \times B) &= s(A) \cdot s(B) \\ &= 3 \cdot 5 \\ &= 15 // \end{aligned}$$

Örnek...6 :

A = {a, b, c} kümesi için A x A kümesinin 5 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

$$\begin{aligned} s(A \times A) &= s(A) \cdot s(A) = 3 \cdot 3 \\ s(A \times A) &= 9 \end{aligned}$$

Selemanlı altküme sayısı $\binom{9}{5}$ olur.

$$\binom{9}{5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(9-5)! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 9 \cdot 2 \cdot 7 = 9 \cdot 14$$

$$= 126 //$$

Örnek...7 :

AxB = {(a, 1), (a, 3), (a, 5)}
CxD = {(a, 2), (b, 4), (a, 4), (b, 2)}
olduğuna göre, s(BxC) kaçtır?

$$\rightarrow A = \{a\} \text{ ve } B = \{1, 3, 5\} \text{ bulunur.}$$

$$\rightarrow C = \{a, b\} \text{ ve } D = \{2, 4\} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} s(B \times C) &= s(B) \cdot s(C) \\ &= 3 \cdot 2 \\ &= 6 // \end{aligned}$$

KARTEZYEN ÇARPIMIN ÖZELLİKLERİ

- 1) $A \times A = A^2$
- 2) **BİRLEŞME ÖZELİĞİ**
 $A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- 3) **DEĞİŞME ÖZELİĞİ**
 $A \times B \neq B \times A$ ($A \neq B$ için)
- 4) **DAĞILMA ÖZELİĞİ**
 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Örnek...8 :

$A \times B = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, c), (1, b)\}$ olduğuna göre, $s(A \times A) + s(B \times A)$ kaçtır?

İlk elemanlar A'dan 2.'ler B'den

$A = \{0, 1\}$ ve $B = \{a, b, c\}$

$$s(A \times A) + s(B \times A) = s(A) \cdot s(A) + s(B) \cdot s(A) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10$$

Örnek...9 :

$A = \{s, o, y, u, t, b, i, r\}$
 $B = \{c, e, b, i, r\}$ kümeleri veriliyor.
 $s[(A \times C) \cap (B \times C)] = 60$ olduğuna göre, C kümesinin eleman sayısı kaçtır?

$(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$

$s[(A \times C) \cap (B \times C)] = s[(A \cap B) \times C] = 60$
 $= s(A \cap B) \cdot s(C) = 60$

$A \cap B = \{b, i, r\}$
 $s(A \cap B) = 3$
 $s(C) = 20$

Örnek...10 :

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinde tanımlı alt kümelerin biri $K = \{(x, y) \mid x + 2y < 14\}$ ise $s(K \times K)$ kaçtır?

Burada A kümesinde tanımlı demek K kümesi (x, y) 'lerden oluştuğundan $A \times A = A^2$ de tanımlı olmasını kastediyor.

$s(K \times K) = s(K) \cdot s(K) = 34 \cdot 34 = 34^2$

K kümesini bulalım.

$x + 2y < 14$

- $x=1$ ise $y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow (1,1), (1,2), \dots, (1,6) \rightarrow 6$ tane
 - $x=2$ ise $y = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow (2,1), (2,2), \dots, (2,5) \rightarrow 5$ tane
 - $x=3$ ise $y = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow (3,1), (3,2), \dots, (3,5) \rightarrow 5$ tane
 - $x=4$ ise $y = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (4,1), (4,2), \dots, (4,4) \rightarrow 4$ tane
 - $x=5$ ise $y = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow (5,1), (5,2), \dots, (5,4) \rightarrow 4$ tane
 - $x=6$ ise $y = \{1, 2, 3\} \Rightarrow (6,1), (6,2), (6,3) \rightarrow 3$ tane
 - $x=7$ ise $y = \{1, 2, 3\} \Rightarrow (7,1), (7,2), (7,3) \rightarrow 3$ tane
 - $x=8$ ise $y = \{1, 2\} \Rightarrow (8,1), (8,2) \rightarrow 2$ tane
 - $x=9$ ise $y = \{1, 2\} \Rightarrow (9,1), (9,2) \rightarrow 2$ tane
- $s(K) = 34$

KARTEZYEN ÇARPIMIN GRAFİĞİ

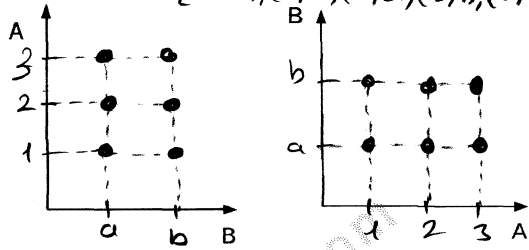
A ve B boştan farklı herhangi iki küme olsun. Koordinat düzleminde, yatay eksen üzerine A kümesinin elemanları, dikey eksen üzerine ise B kümesinin elemanları işaretlenmek suretiyle oluşturulan sıralı ikililerin kümesi $A \times B$ çarpımının grafiğini oluşturur.

Örnek...11 :

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ kümeleri için, $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerinin grafiklerini

çiziniz. $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

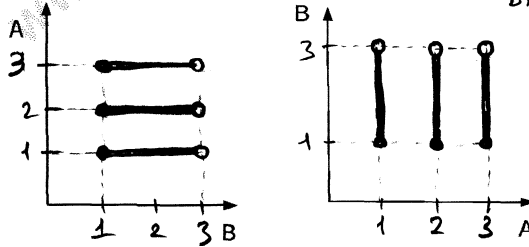
$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$



NOT İki kümede noktalardan oluşuyorsa Kartezyen

Örnek...12 : grafiği yukarıdaki gibi kafes şeklinde noktalardan oluşur.

$A = \{1, 3, 4\}$ kümesi ile $B = [1, 3)$ yarı açık aralığı için, $A \times B$ ve $B \times A$ nın grafiğini çiziniz.

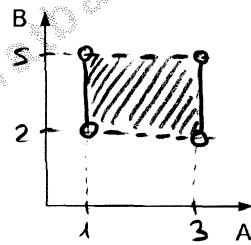


NOT Komenin biri noktalardan birisi de aralıktan oluşuyorsa grafik çizgi şeklindedir.

$[1, 3)$ 'de 3 dahil değil - 0 yordan 3 açık bırakıldı.

Örnek...13 :

A ve B reel sayı aralıkları olmak üzere, $A = [1, 3]$ ve $B = (2, 5)$ için, $A \times B$ nin grafiğini çiziniz.



NOT İki kümede aralık ise Kartezyen grafiği bölge şeklinde olur. $(2, 5)$ 'de 2 ve 5 açık olduğundan onların olduğu çizgi dahil edilmez.

KÜMELER - 4

(SIRALI İKİLİ VE ÖZELLİKLERİ - KARTEZYEN ÇARPIM VE ÖZELLİKLERİ)

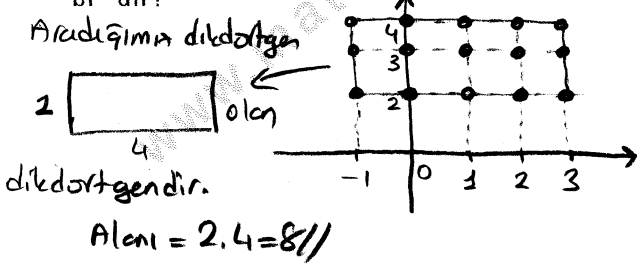
$$A \times B = \{(-1,2), (-1,3), (-1,4), (0,2), (0,3), (0,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$

Örnek...14 :

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

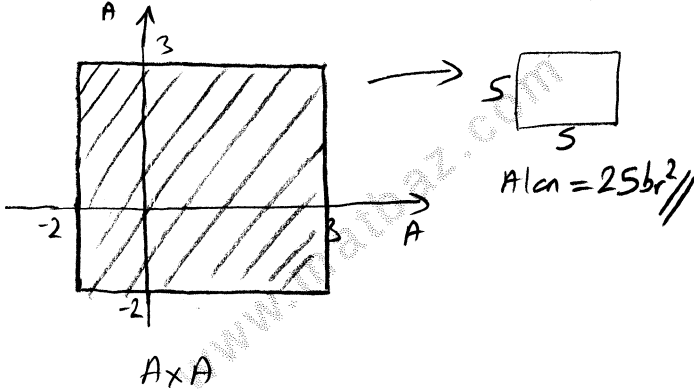
$$B = \{2, 3, 4\}$$

kümeleri için, $A \times B$ kartezyen çarpım kümesinin grafiğindeki noktaları dışarıda bırakmayan en küçük dikdörtgenin alanı kaç br^2 dir?



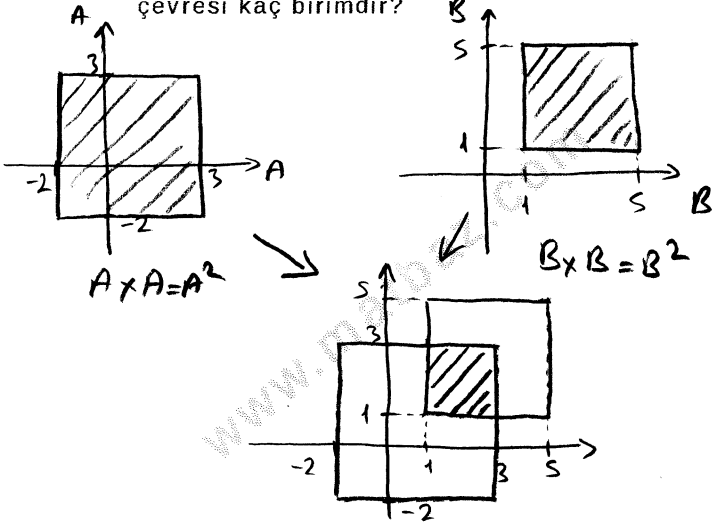
Örnek...15 :

$A = [-2, 3]$ olmak üzere, A^2 'nin grafiğinin taradığı bölgenin alanı kaç br^2 dir?



Örnek...16 :

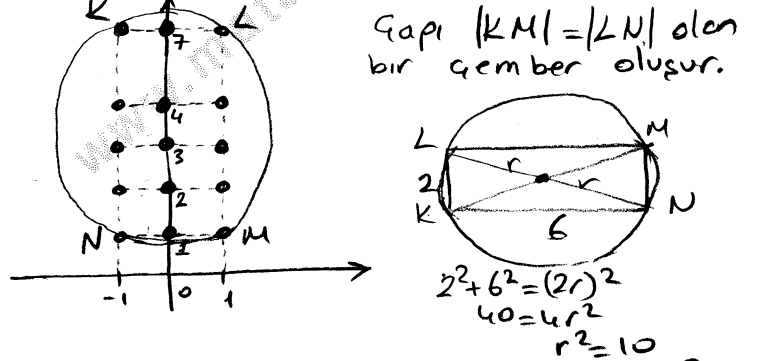
$A = [-2, 3]$ ve $B = [1, 5]$ olmak üzere, $A^2 \cap B^2$ 'nin düzlemde sınırladığı bölgenin çevresi kaç birimdir?



$$A \times B = \{(-1,1), (-1,2), (-1,3), (1,1), (1,2), (1,3), (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,7), (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,7)\}$$

Örnek...17 :

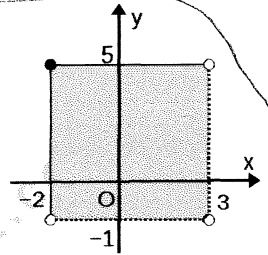
$A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ kümeleri için, $A \times B$ nin elemanlarını dışarıda bırakmayacak şekilde çizilen en küçük dairenin alanı kaç birim karedir?



Örnek...18 :

Yandaki grafik $A \times B$ kartezyen çarpımının grafiğidir.

Buna göre $A \cap B$ kümesinin eşiği nedir?



- A) $[-2, 3]$ B) $[-1, 5]$ C) $[-2, 5]$
D) $[-1, 3]$ E) $[-2, -1]$

$A \times B$ 'nin grafiği ise x eksenindeki aralık A kesimidir. $A = [-2, 3] \rightarrow 2$ çapılı olduğundan dahil, 3 noktalı olduğundan dahil değil.
 $B = [-1, 5]$

$$A \cap B = [-1, 3]$$

Örnek...19 :

5 elemanlı bir kümenin kendisiyle kartezyen çarpımı ile elde edilen kümenin alt kümelerinin kaçında bileşenleri eşit olan ikililer yoktur?

Kesmemiz $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.
 $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), \dots, (5,4), (5,5)\}$
 $S(A \times A) = 25$

Bileşenleri eşit olanlar $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)$
Bunları çıkarıp geriye kalan 20 elemanın tüm altkümelerini hesaplırsak 2^{20} tanesinde bileşenleri aynı olanlar bulunmaz,

$A^2 \cap B^2$ şeklindeki taralı bölgedir.

DEĞERLENDİRME - 1

- 1) $(3a-7, 9) = (8, 2b-3)$
sıralı ikilileri eşit olduğuna göre, $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} 3a-7 &= 8 & 9 &= 2b-3 \\ 3a &= 8+7 & 9+3 &= 2b \\ \frac{3a}{3} &= \frac{15}{3} & \frac{12}{2} &= \frac{2b}{2} \\ a &= 5 & b &= 6 \\ a \cdot b &= 5 \cdot 6 = 30 // \end{aligned}$$

- 2) $(2x-3y, 7) = (51, 2x+y)$
sıralı ikilileri eşit olduğuna göre, $x \cdot y$ çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} 2x-3y &= 51 & \rightarrow & 2 \cdot 9 - 3y = 51 \\ 3 \cdot 2x + y &= 7 & 18 - 3y &= 51 \\ \hline 2x-3y &= 51 & 18-51 &= 3y \\ + 6x+3y &= 21 & -33 &= 3y \\ \hline 8x &= 72 \Rightarrow x=9 & x \cdot y &= 9 \cdot (-11) = -99 // \end{aligned}$$

- 3) $A \times B = \{(a,3), (a,5), (a,7), (b,3), (b,5), (b,7)\}$
 $C \times D = \{(x,2), (x,4), (y,2), (y,4), (z,2), (z,4)\}$
olduğuna göre, $B \times D$ kümesini liste yöntemiyle yazınız.

1. elemanlar A'dan 2. ler B'den alınmış.

$$A = \{a, b\} \quad B = \{3, 5, 7\}$$

$$C = \{x, y, z\} \quad D = \{2, 4\}$$

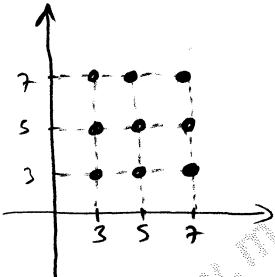
$$B \times D = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4), (7,2), (7,4)\}$$

- 4) $A \times B = \{(a,3), (a,5), (a,7), (b,3), (b,5), (b,7)\}$
olduğuna göre, $B \times B = B^2$ kümesinin grafiğini çizin.

B, 2. bileşenlerden oluşuyor.

$$B = \{3, 5, 7\}$$

$$B \times B = \{(3,3), (3,5), (3,7), (5,3), (5,5), (5,7), (7,3), (7,5), (7,7)\}$$



- 5) $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{2, 3\}$ olduğuna göre, $s(A \times B \times A)$ değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} s(A \times B \times A) &= s(A) \cdot s(B) \cdot s(A) \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 18 // \end{aligned}$$

- 6) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{5, 7\}$ olduğuna göre, $A \times B$ kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı kaçtır?

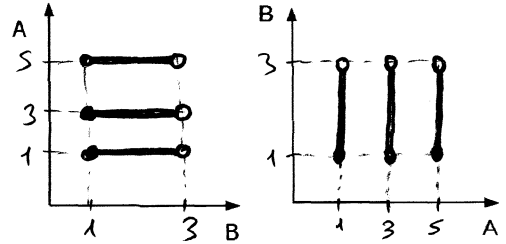
$$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

$A \times B$ 'nin 3 elemanlı altküme sayısı

$$\binom{8}{3} \text{ olur.}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 //$$

- 7) $A = \{1, 3, 5\}$ kümesi ve $B = [1, 3)$ yarı açık aralığı için, $A \times B$ ve $B \times A$ kümesinin grafiğini çizin.



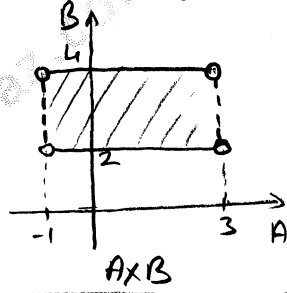
Kümelelerin biri noktalardan $\{1, 3, 5\}$ biri aralıktan $[1, 3)$ olduğundan grafikleri noktaların hizasında girilen 1 ucu kapalı, 3 ucu açık olan doğrulardır.

KÜMELER - 4

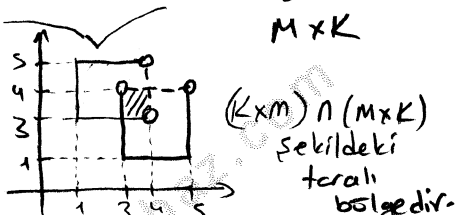
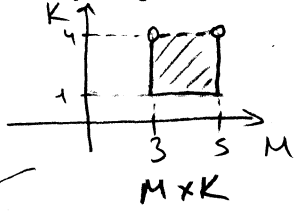
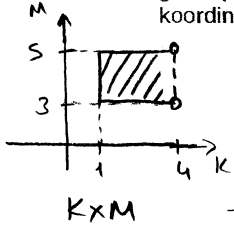
(SIRALI İKİLİ VE ÖZELLİKLERİ - KARTEZYEN ÇARPIM VE ÖZELLİKLERİ)

- 8) $A = \{x \mid -1 < x < 3, x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{x \mid 2 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre, $A \times B$ kümesinin grafiğini çiziniz.

$A = (-1, 3)$
 $B = [2, 4]$

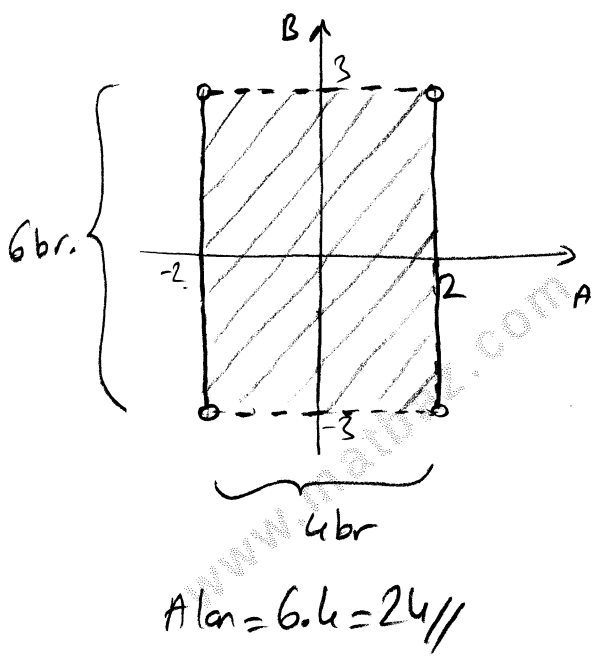


- 9) $K = [1, 4]$ ve $M = [3, 5]$ reel sayı aralıkları olduğuna göre, $(K \times M) \cap (M \times K)$ kümesinin belirttiği bölgeyi koordinat düzleminde tarayarak gösteriniz.



- 10) $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{y \mid |y| < 3, y \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre, $A \times B$ kümesinin oluşturduğu bölgenin alanı kaç birim karedir?

$A = [-2, 2]$ $B = (-3, 3)$



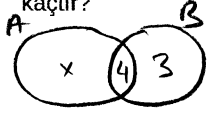
- 11) A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, $s(B \cup C) = 8$, $s(A \times B) = 35$, $s[(A \times B) \cup (A \times C)] = 56$ olduğuna göre, B kümesinin alt küme sayısı kaçtır?

$s[(A \times B) \cup (A \times C)] = 56$
 $s[A \times (B \cup C)] = 56$
 $s(A) \cdot s(B \cup C) = 56$
 $s(A) \cdot 8 = 56$
 $s(A) = 7$

$s(A \times B) = 35$
 $s(A) \cdot s(B) = 35$
 $7 \cdot s(B) = 35$
 $s(B) = 5$

B'nin altküme sayısı = $2^5 = 32 //$

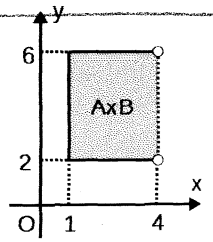
- 12) A ve B gibi iki kümenin arakesitlerinin alt küme sayısı 16' dir. $s(B) = 7$ ve $s[A \times (A \cup B)] = 108$ olduğuna göre, $A \cap B$ kümesinin eleman sayısı kaçtır?



$2^4 = 16$ olduğundan $s(A \cap B) = 4$
 $s(B) = 7$ ise $s(B - A) = 3$ olur.
 $s(A - B) = x$ diyelim.

$s[A \times (A \cup B)] = 108$
 $s(A) \cdot s(A \cup B) = 108$
 $(x+4) \cdot (x+4+3) = 108$
 $(x+4) \cdot (x+7) = 108$
 $(x+4)$ ve $(x+7)$ aralarında 3 fark vardır ve çarpımları 108'dir.
Bu sayılar 9 · 12 = 108 olur.
 $x+4 = 9$
 $x = 5$
 $s(A - B) = x = 5 //$

- 13) Yandaki grafik $A \times B$ kartezyen çarpımının grafiğidir. Buna göre $A \cap B$ ve $B \setminus A$ kümesinin eşiği nedir?



x eksenindeki küme (aksi belirtilmedikçe) 1.kümedir.
 $A = [1, 4)$ $B = [2, 6]$
 $A \cap B = [2, 4)$ //
 $B \setminus A = [4, 6)$ //