

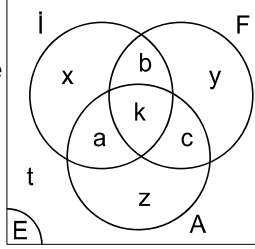
KÜMELER - 3

(KÜME PROBLEMLERİ)

KÜME PROBLEMLERİNİ ÇÖZMEK İÇİN GENEL STRATEJİ NEDİR?

- 1) Problemden verilenlere uygun şekil çizilir.
- 2) Bilinen değerler yerlerine yazıldıktan sonra yeteri kadar değişken kullanılarak elde edilen denklemlerle sonuca gidilir.
- 3) Bazı sorularda tüm değişkenler bulunamasa da sonuç bulunabilir.

Yandaki Venn şemasında bir toplulukta İngilizce, Fransızca ve Almanca konuşanların kümesi İ, F ve A ile gösterilip kümelerin içine eleman sayıları yazılmıştır. Aşağıdaki tabloda tanımlanan kümelerin sembolik gösterimi ve gösterimi yapılan kümelerin eleman sayıları belirtilmiştir.

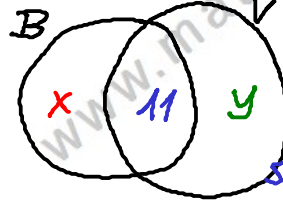


Tanımlanan Küme	Küme Adı	Eleman Sayısı
Yalnız İngilizce konuşan	$\bar{I} - (F \cup A)$	x
İngilizce konuşan	I	$x+a+b+k$
Tek dil bilenler	?	$x+y+z$
İki dil bilenler	?	$a+b+c$
Üç dil bilenler	$I \cap F \cap A$	k
Fransızca ve Almanca bilenler	$F \cap A$	$k+c$
Yalnız Fransızca ve Almanca bilenler	$(F \cap A) - (I \cap F \cap A)$	c
Fransızca bilmeyen ve Almanca bilmeyen	$F' \cap A'$	$x+t$
Almanca bilmeyen	A'	$x+b+y+t$
Fransızca bilmeyen ve İngilizce bilenler	$F' \cap I$	$x+a$
Hiç dil bilmeyen	$(A \cup F \cup I)'$	t
En az iki dil bilenler	?	$a+b+c+k$
En çok iki dil bilenler	$E - (A \cap F \cap I)$	$a+b+c+x+y+z+t$
İngilizce veya Almanca bilenler	$I \cup A$	$b+x+c+z+a+k$
İngilizce ya da Almanca bilenler	$(\bar{I}-A) \cup (A-\bar{I})$ $I \Delta A$	$b+x+c+z$

Örnek...1 :

Bir sınıftaki öğrencilerden 16'sı basketbol, 22'si voleybol ve 11'i de her iki oyunu oynuyor.

Bu sınıfta basketbol veya voleybol oynayan kaç kişi vardır?



$$x+11=16$$

$$x=5$$

$$y+11=22$$

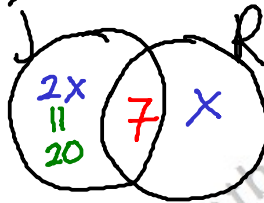
$$y=11$$

$$S(B \cup V) = x+11+y = 5+11+11 = 27$$

Örnek...2 :

Japonca veya Rusça bilenlerden oluşan bir toplulukta 37 kişi vardır. Bu toplulukta yalnız Japonca bilenlerin sayısı yalnız Rusça bilenlerin sayısının 2 katıdır.

Toplulukta 7 kişi her iki dili bildiğine göre, yalnız Japonca bilenler kaç kişidir?



$$2x+7+x=37$$

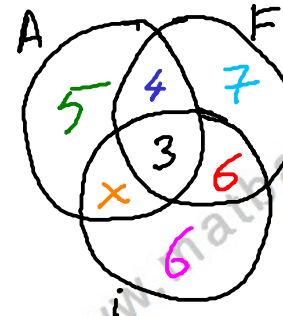
$$3x=30$$

$$x=10$$

$$S(J - R) = 20$$

Örnek...3 :

40 kişilik bir turist kafesinde Almanca, Fransızca ve İngilizce konuşulmaktadır. Yolcuların 3'ü her üç dili bilmektedir. Yolculardan 7'si Fransızca ve Almanca, 9'u Fransızca ve İngilizce, 5'i yalnız Almanca, 7'si yalnız Fransızca, 6'sı da yalnız İngilizce bilmektedir. Yolculardan her biri bu dillerden en az birini bildiğine göre, yalnız Almanca ve İngilizce bilen kaç kişi vardır?



$$5+4+7+6+6+3+x=40$$

$$31+x=40$$

$$x=9$$

Yalnız Alm. ve İng. bilenlerin sayısı

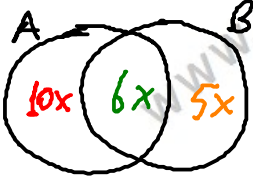
KÜMELER - 3

(KÜME PROBLEMLERİ)

Örnek...9 :

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için,
 $3 \cdot s(A - B) = 5 \cdot s(A \cap B) = 6 \cdot s(B - A)$
 olduğuna göre, **AUB** kümesinin eleman sayısı **en az** kaçtır?

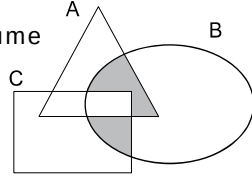
3; 5; 6 sayıları 30'da eşitlenir.



$x=1$ için
 $s(A \cup B) = 10 + 6 + 5$
 $= 21$

Örnek...10 :

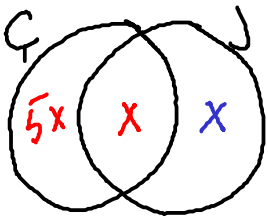
Yandaki şemada taralı küme aşağıdakilerden hangisine eşittir?



- A) $A \cap B \cap C$
- B) $(A \cap B) \setminus C$
- C) $(C \cap B) \setminus A$
- D) $(A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$
- E) $(B \cap (A \cup C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

Örnek...11 :

Bir sınıfta Çince veya Japonca'dan en az birini bilen 42 öğrenci vardır. Çince bilenlerin sayısı, Japonca bilenlerin sayısının 3 katı, her iki dili bilenlerin sayısının ise 6 katıdır. Buna göre, sınıfta Çince bilenlerin sayısı kaçtır?



$7x = 42$
 $x = 6$
 $s(C) = 6x = 36$

Örnek...12 :

Pozitif tamsayılardan oluşan
 $A = \{x \mid x < 76, x = 2k, k \in \mathbb{Z}^+\}$
 $B = \{x \mid x < 191, x = 3k, k \in \mathbb{Z}^+\}$
 kümeleri veriliyor.
 Buna göre, **AUB** kümesinin eleman sayısı kaçtır?

$A = \{2, 4, 6, \dots, 74\} \rightarrow s(A) = \frac{74-2}{2} + 1 = 37$

$B = \{3, 6, 9, \dots, 189\} \rightarrow s(B) = \frac{189-3}{3} + 1 = 63$

$A \cap B = \{6, 12, \dots, 72\} \rightarrow s(A \cap B) = \frac{72-6}{6} + 1 = 12$

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
 $= 37 + 63 - 12$
 $= 88$

Örnek...13 :

$A \cap B \neq \emptyset$ olmak üzere,
 $s(B) = 4 \cdot s(A)$
 $s(B \setminus A) = 5 \cdot s(A \setminus B)$
 olduğuna göre, B kümesi **en az** kaç elemanlıdır?



$s(A) = x + y$
 $s(B) = 5x + y$

$5x + y = 4 \cdot (x + y)$
 $5x + y = 4x + 4y$
 $x = 3y$

$s(B) = 1 + 15 = 16$

Örnek...14 :

E kümesi, $\{1, 3, 5, 7\}$ kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulan ve rakamları birbirinden farklı dört basamaklı bütün doğal sayıların kümesidir. E'nin elemanlarından 7 rakamı 1 rakamının solunda olanlar A kümesini, 7 rakamı 3 rakamının sağında olanlar B kümesini oluşturuyor. Buna göre, **AUB** kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Bu 4 rakamın sıralanışı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ farklı şekilde olur. $s(E) = 24$ tür.

A kümesi

$7 _ _ _ 1$
 $7 _ _ 1 _$
 $7 _ 1 _ _$
 $_ 7 _ _ _$
 $_ _ 7 _ _$
 $_ _ _ 7 _$
 $s(A) = 12$

B kümesi

$3 _ _ _ 7$
 $3 _ _ 7 _$
 $3 _ 7 _ _$
 $_ 3 _ _ _ 7$
 $_ _ 3 _ _ _ 7$
 $_ _ _ 3 _ _ _ 7$
 $s(B) = 12$

A ∩ B kümesi

$3 _ 7 _ _ _$
 $3 _ 7 _ _ 1$
 $3 _ _ 7 _ _$
 $_ 3 _ 7 _ _$
 $s(A \cap B) = 4$

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
 $= 12 + 12 - 4$
 $= 20$

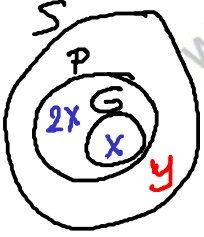
KÜMELER - 3

(KÜME PROBLEMLERİ)

DEĞERLENDİRME - 1

- 1) Mevcudu 30' dan az olan bir sınıfta gitar çalan herkes, piyano da çalabiliyor. Piyano çalanların sayısı, gitar çalanların sayısının 3 katıdır. Gitar çalamayanlar piyano çalamayanların 2 katı olduğuna göre, bu sınıftaki öğrenci sayısı en çok kaçtır?

A)24 B)25 C)26 D)27 E)28



$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \cdot y \\ 2x &= y \\ s(S) &= 2x + x + y \\ &= 5x = 25 < 30 \\ x &= 5 \text{ için} \end{aligned}$$

- 2) 30 kişilik bir sınıftaki sarışın ve gözlüklü öğrencilerin sayısı sarışın olmayan gözlüksüz öğrencilerin sayısından 8 fazla, gözlüklü öğrencilerin sayısı, gözlüksüz öğrencilerin sayısının 2 katıdır. Buna göre sarışın olmayan öğrenci sayısı kaçtır?

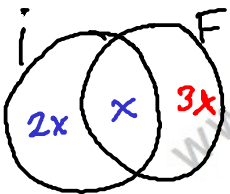
A)10 B)12 C)15 D)18 E)20

	G.lü	G.süz
S	$x+8$	z
S'	y	x
	$2k$	k
		30

$$\begin{aligned} z &= 22 - 2x - y \\ 2k &= x + 8 + y \\ k &= x + (22 - 2x - y) \\ x + 8 + y &= 2 \cdot (22 - x - y) \\ x + y &= 12 \\ s(S') &= x + y = 12 \end{aligned}$$

- 3) İngilizce veya Fransızca dillerinden en az birinin konuşulduğu bir sınıfta İngilizce bilenlerin sayısı her iki dili de bilenlerin sayısının 3 katı, Fransızca bilenlerin sayısı sadece İngilizce bilenlerin sayısının 2 katıdır. Sınıf mevcudu kaç olabilir?

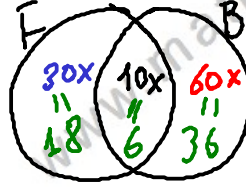
A)7 B)10 C)17 D)32 E)36



$$\begin{aligned} s(I \cup F) &= 6x \text{ olmalı} \\ \text{çünkü } 6 \text{ nın } 6 \text{ katı} \\ &\text{olan bir sayı olur.} \end{aligned}$$

- 4) En az bir zayıf olan öğrencilerin bulunduğu bir sınıfta, %40' ı fizikten, %70' i biyolojiden kalmıştır. Her ikisinden kalan 6 kişi olduğuna göre sınıfta kaç öğrenci vardır?

A)30 B)40 C)60 D)70 E)110

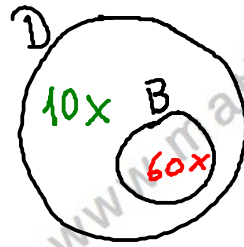


$$\begin{aligned} \%40 + \%70 &= \%110 \\ F \cap B &= \%10 \text{ dur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(F \cup B) &= 100x \\ &= 6 \cdot 10 \\ &= 60 \end{aligned}$$

- 5) Bir sitede oturan ailelerin % 70' inde DVD oynatıcı, % 60' ında bilgisayar vardır. Buna göre, yalnız DVD oynatıcısı olan aile sayısı en az kaçtır?

A)1 B)2 C)3 D)4 E)40



DVD'nin en az olması için BCD olmalıdır.

$$\begin{aligned} 10x &= 1 \text{ olursa} \\ s(B) &= 6 \text{ ve } s(D) = 7 \\ \text{olur. } s(D - B) &= 1 \end{aligned}$$

- 6) 66 kişilik bir sınıfta gözlüklü kızların sayısı gözlüksüz erkeklerin sayısının % 30' udur. Sınıftaki kız öğrenci sayısı erkek öğrenci sayısından 6 eksiktir. Sınıfta 6 tane gözlüklü erkek olduğuna göre, kaç tane gözlüksüz kız öğrenci vardır?

A)3 B)9 C)21 D)25 E)30

	G.lü	G.süz
K	$3x$	y
E	6	$10x$
		66

$$\begin{aligned} 3x + y &= 30 \\ 3 \cdot 3 + y &= 30 \\ y &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 + 10x &= 36 \\ 10x &= 30 \\ x &= 3 \end{aligned}$$