

TÜREV ALMA KURALLARI

BÖLÜM 6

KAPALI FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ ve $F(x,y)=0$ biçimindeki bir denklemde y kapalı olarak verilmiştir denir. Bu şekildeki bir denklemde $\frac{dy}{dx}$ i bulmak için: Her terimin x e göre türevi alınır ve $\frac{dy}{dx}$ çekilir veya

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \text{ hesaplanır.}$$

$F'_x(x,y)$: F nin x' e göre türevidir.
(y sabit gibi düşünülür)

$F'_y(x,y)$: F nin y' ye göre türevidir.
(x sabit gibi düşünülür)

Örnek...1 :

$$x^2+y^2=1 \text{ ise } \frac{dy}{dx}=?$$

$$x^2+y^2-1=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} //$$

Örnek...2 :

$$x^3+y^2=1 \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ } y=1 \text{ için kaçtır?}$$

$$x^3+y^2-1=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{2y}$$

$$y' = \frac{-3 \cdot 0^2}{2 \cdot 1}$$

$$y' = 0 //$$

Örnek...3 :

$$3x^2y+3xy^2=xy \text{ ise } \frac{dy}{dx}=?$$

$$3x^2y+3xy^2-xy=0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6xy+3y^2-y}{3x^2+6xy-x} //$$

Örnek...4 :

$$f(x,y)=x^3y-y^2x+2x-y=0 \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ } x=1 \text{ } (y>0)$$

için kaçtır?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y-2y^2 \cdot \frac{1}{2x}+2}{x^3-2x \cdot y-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2}-2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1}+2}{1^3-2 \cdot 1 \cdot (\sqrt{2})^{2 \cdot 1}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}+2}{1-2\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3\sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}+2}{-2\sqrt{2}} //$$

$$x^3y-y^2x+2x-y=0$$

$x=1$ için y 'yi bulalım.

$$1^3 \cdot y - y^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - y = 0$$

$$y - y^2 + 2 - y = 0$$

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm \sqrt{2}$$

$y > 0$ ise

$$y = \sqrt{2} \text{ alırız.}$$

Yeni türevi aldıktan sonra x yerine 1, y yerine $\sqrt{2}$ koyarız.

Örnek...5 :

$$f(x,y)=xy-y^2+4x-y=0 \text{ fonksiyonunun } A(1,-2) \text{ noktasındaki türev değeri kaçtır?}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y-0+4-0}{x-2y+0-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+4}{x-2y-1}$$

$$= -\frac{-2+4}{1-2 \cdot (-2)-1}$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} //$$

TÜREV - 6

(KAPALI FONKSİYON , YÜKSEK MERTEBEDEN (ARDIŞIK) VE ÖTF TÜREV ALMA KURALLARI)

YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

Bir $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y=f(x)$ fonksiyonun bir x noktasında birinci mertebeden türevi $y'=f'$ ile $y'=f'$ fonksiyonu aynı noktada türevlenebiliyorsa $(y')'=f''=f^{(2)}$ fonksiyonuna ikinci mertebeden türevi denir ve $y''=\left(\frac{dy}{dx}\right)'=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ ile gösterilir. n . mertebeden türev ise $\frac{d^n y}{dx^n}$ gösterilir.

Örnek...6 :

$y=3x^4$ fonksiyonun üçüncü mertebeden türevini bulunuz.

$$y=3x^4$$

$$y'=12x^3$$

$$y''=36x^2$$

$$y'''=72x //$$

Örnek...7 :

$$y=\cos x \text{ ise } \frac{d^{103}y}{dx^{103}}=?$$

$$y=\cos x$$

$$y'=-\sin x$$

$$y''=-\cos x$$

$$y'''=\sin x$$

$$y^{(4)}=\cos x$$

4'ün katları olan
türevlerde $\cos x$
elde edilir.

$$y^{(100)}=\cos x$$

$$y^{(101)}=-\sin x$$

$$y^{(102)}=-\cos x$$

$$y^{(103)}=\sin x //$$

Örnek...8 :

$$y=\ln x \text{ ise } \frac{d^{67}y}{dx^{67}}=?$$

$$y'=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

$$y''=(-1).x^{-2}$$

$$y'''=(-1).(-2).x^{-3}$$

$$y^{(4)}=(-1).(-2).(-3).x^{-4}$$

⋮

$$y^{(67)}=\underbrace{(-1).(-2).(-3)\dots(-66)}_{\text{işareti pozitif.}}.x^{-67}$$

$$y^{(67)}=\frac{66!}{x^{67}} //$$

Örnek...9 :

$$y=e^{3x} \text{ ise } \frac{d^{29}y}{dx^{29}}=?$$

NOT

$$y=a^{u(x)} \text{ ise}$$

$$y'=u'(x).a^{u(x)}. \ln a \text{ dir}$$

$$y'=3.e^{3x}. \ln e=3.e^{3x}$$

$$y''=3.3.e^{3x}. \ln e=3^2.e^{3x}$$

$$y'''=3^2.3.e^{3x}. \ln e=3^3.e^{3x}$$

⋮

$$y^{(29)}=3^{29}.e^{3x} \text{ olur.} //$$

TÜREV - 6

(KAPALI FONKSİYON , YÜKSEK MERTEBEDEN (ARDIŞIK) VE ÖTE TÜREV ALMA KURALLARI)

DEĞERLENDİRME - 1

- 1) $x^3 + y^2 = 33$ ise $\frac{dy}{dx}$ $y=5$ için kaçtır?

$$\begin{aligned} x^3 + y^2 - 33 &= 0 & x^3 + y^2 &= 33 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3x^2}{2y} & y=5 \text{ için} \\ & & x^3 + 5^2 &= 33 \\ & & x^3 &= 33 - 25 \\ & & x^3 &= 8 \\ & & x &= 2 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3 \cdot 2^2}{2 \cdot 5} = -\frac{12}{5} = -\frac{6}{5} //$$

- 2) $f(x,y) = x^2y + ky^2 + 4kx - 2 = 0$ fonksiyonunun $A(0,-2)$ noktasındaki türev değeri kaçtır?

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2xy + 0 + 4k - 0}{x^2 + 2ky + 0 - 0} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{2xy + 4k}{x^2 + 2ky} \quad \begin{array}{l} \text{türevde} \\ x=0 \text{ ve} \\ y=-2 \\ \text{verirsek} \end{array} \\ &= -\frac{2 \cdot 0 \cdot (-2) + 4k}{0^2 + 2k \cdot (-2)} \\ &= -\frac{4k}{-4k} = 1 // \end{aligned}$$

- 3) $f(x,y) = 3x^2 - 12x + y^3 + 2y = 0$ hangi noktadaki türev değeri 0 olur?

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x - 12 + 0 + 0}{0 - 0 + 3y^2 + 2} = -\frac{6x - 12}{3y^2 + 2} = 0$$

$$\begin{aligned} 6x - 12 &= 0 \\ 6x &= 12 \end{aligned}$$

$x=2$ noktasında türev sıfır olur //

- 4) $f(x) = \arctan x$ ise $f''(1) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (1+x^2) - (2x) \cdot 1}{(1+x^2)^2} \quad (\text{Bölme türevinden})$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = \frac{-2 \cdot 1}{(1+1^2)^2}$$

$$f''(1) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} //$$

- 5) $y = \sin x$ ise $\frac{d^{58}y}{dx^{58}} = ?$

$$\begin{aligned} y' &= \cos x \\ y'' &= -\sin x \\ y''' &= -\cos x \\ y^{(4)} &= \sin x \\ y^{(5)} &= \cos x \end{aligned}$$

Her 4'ün katı olan türevde sonuç $\sin x$ gelir. Buna göre

$$y^{(56)} = \sin x$$

$$y^{(57)} = \cos x$$

$$y^{(58)} = -\sin x //$$

- 6) $f(x) = \ln x$ ise $f^{(n)}(1) = ?$

$$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = (-1) \cdot x^{-2}$$

$$f'''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot x^{-4}$$

$$f^{(n)}(x) = \underbrace{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-n+1)}_{\text{işareti } (-1)^{n-1} \text{ var.}} \cdot x^{-n} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} //$$

- 7) $y = e^{-2x}$ ise $\frac{d^{23}y}{dx^{23}} = ?$

$$y' = (-2) \cdot e^{-2x} \cdot \ln e = (-2) \cdot e^{-2x}$$

$$y'' = (-2) \cdot (-2) \cdot e^{-2x} \cdot \ln e = (-2)^2 \cdot e^{-2x}$$

$$y^{(23)} = (-2)^{23} \cdot e^{-2x} //$$

- 8) $P(x)$ 20. dereceden bir polinom ve $x \neq 0$ için $P^{(n)}(x) = 0$ ise n en az kaç olabilir?

$$P(x) = a \cdot x^{20} \text{ şeklinde olsun.}$$

$P^{(n)}(x) = 0$ n . dereceden türev alındığında türevin sıfıra eşit olduğu belirtilmiş.

Bu türevin sıfır olduğu türev

x^0 'lı terime ulaşıldıktan sonra alınan türevidir. 20. türevde

$$P^{(20)}(x) = \dots \cdot x^0 \text{ olur.}$$

Demek ki 21. türevde

$$P^{(21)}(x) = 0 \cdot (\dots) = 0 \text{ olur.} //$$

n en az 21 olur. Çünkü bundan sonraki tüm türevler de sıfır olur. //

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONUNUN TÜREVİ

Özel tanımlı fonksiyonlar her yerde sürekli olmadıklarından her yerde türevlenemez. Bu fonksiyonların türevlerinin istendiği noktalarda sürekli oldukları bulunursa sağdan ve soldan türevine bakılır.

PARÇALI FONKSİYONUN TÜREVİ

p, q, r tanım kümelerinde türevlenebilen fonksiyonlar olsun.

$$f(x) = \begin{cases} p(x) & x < a \\ q(x) & a \leq x < b \text{ ise} \\ r(x) & b \leq x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} p'(x) & x < a \\ q'(x) & a < x < b \text{ olur.} \\ r'(x) & b < x \end{cases}$$

Kritik noktalarda sağdan ve soldan türevlere bakılmalıdır. Eğer bu noktalarda süreklilik var ise sağ ve sol türevlerin eşitliği durumunda noktalar parçalara eklenir.

Örnek...1:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x < 2 \\ x^4 - 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^3 + 3 \cdot 2 = 14 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2^4 - 2 = 14 \\ \text{süreklidir.} \end{matrix}$$

① önce fonksiyonu için $f'(x)$ türev fonksiyonunu yazınız?

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3, & x < 2 \\ 4x^3, & x > 2 \end{cases}$$

yazalım. Bu fonksiyon $x=2$ dışında sürekli ve türeldir. Fakat $x=2$ noktası ayrıca incelenmeli: türev varsa $f'(x)$ 'e dahil edilmelidir.

Örnek...2:

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 - 7x & x < 1 \\ x^3 - 2 & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{için } f'(0) + f'(2) = ?$$

$$f'(x) = \begin{cases} 18x - 7, & x < 1 \\ 3x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Kritik noktalar sorulmuyor.

$$f'(0) = 18 \cdot 0 - 7 = -7$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$$f'(0) + f'(2) = (-7) + 12 = 5$$

Örnek...3:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m & x \leq 1 \\ nx^3 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ 3x^2n, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda türevli ise (m,n) ikilisini bulunuz

① $x \leq 1$ ve $x > 1$ olan aralıklarda fonksiyon polinom olduğundan sorun yoktur. $x=1$ kritiktir, incelenmeli:

② tam reel sayılarda türevli ise $x=1$ 'de de hem sürekli hem türeldir demektir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + m$$

$$f'(1^-) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = n + 1$$

$$f'(1^+) = 3 \cdot 1^2 \cdot n = 3n$$

$$1 + m = n + 1$$

$$m = n$$

$$3n = 2$$

$$n = \frac{2}{3}$$

$$m = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN TÜREVİ

Kritik olmayan noktada mutlak değer fonksiyonu önce tanımlanır, sonra türev alınır, daha sonra verilen nokta türevde yerine konulur.

Örnek...4:

$x^3 + 3x = x(x^2 + 3) = 0$ $x=0$ $\rightarrow \emptyset$ 1 ve 2
 $f(x) = |x^3 + 3x|$ fonksiyonu için $f'(1) + f'(2) = ?$ noktaları kritik değil.

$x=1$ ve $x=2$ için mutlak değer $\rightarrow \pm$

$$f(x) = x^3 + 3x \text{ alınır.}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 3 = 6$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 3 = 15$$

$$6 + 15 = 21 //$$

Kritik noktalarda sağ ve sol türevler karşılaştırılır. Bunun içinse fonksiyon önce parçalı olarak yazılmalıdır.

Örnek...5:

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri varsa bulunuz?

$x=0$ noktası fonksiyonu tanımsız yapar.

dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ 'da sürekli değildir. Dolayısıyla $x=0$ 'da türevlenemez,

$$f'(0) \text{ yoktur.}$$

TÜREV - 6

(KAPALI FONKSİYON , YÜKSEK MERTEBEDEN (ARDIŞIK) VE ÖTF TÜREV ALMA KURALLARI)

Örnek...6 :

$f(x)=|x^2-2x|$ fonksiyonu için $f'(2)$ değeri varsa bulunuz?

$x=2$ kritik noktadır. $f(x)$ 'i parçalı olarak yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} x^2-2x, & 2 \leq x \\ -x^2+2x, & 0 \leq x < 2 \\ x^2-2x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2, & 2 \leq x \\ -2x+2, & 0 \leq x < 2 \\ 2x-2, & x < 0 \end{cases}$$

① önce $x=2$ 'de sürekliliği mi bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -4+4=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4-4=0$$

$$f(2) = 0$$

sürekliliği

$$f'(2^-) = -2.2+2 = -2$$

$$f'(2^+) = 2.2-2 = 2$$

$$-2 \neq 2$$

türeli değil.

$f'(2)$ yoktur.

Örnek...7 :

$f(x)=|x-1|(x-1)$ fonksiyonu için $f'(1)$ değeri varsa bulunuz?

$x=1$ kritik nokta.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1).(x-1), & x \geq 1 \\ -(x-1).(x-1), & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2-2x+1, & x \geq 1 \\ -x^2+2x-1, & x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x-2, & x \geq 1 \\ -2x+2, & x < 1 \end{cases}$$

① önce sürekliliğe bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1+2-1=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1-2+1=0$$

$$f(1) = 0$$

sürekliliği

② turelenebilir mi bakalım.

$$f'(1^-) =$$

Örnek...8 :

$f(x)=|x^2-mx+3|$ fonksiyonu her noktada türevli ise m kaçtır?

Demek ki kritik noktası (kırılma noktası) yok.

Bu da köke yok demektir.

$$\Delta < 0$$

$$(-m)^2 - 4.1.3 < 0$$

$$m^2 < 12$$

$$-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3} //$$

Örnek...9 :

$f(x)=|x^2-4|$ fonksiyonu için $f'(2^+)=?$

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4, & 2 \leq x \\ -x^2+4, & -2 \leq x < 2 \\ x^2-4, & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & 2 \leq x \\ -2x, & -2 \leq x < 2 \\ 2x, & x < -2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = 2.2 = 4 //$$

TÜREV - 6

(KAPALI FONKSİYON , YÜKSEK MERTEBEDEN (ARDIŞIK) VE ÖTF TÜREV ALMA KURALLARI)

DEĞERLENDİRME - 2

1) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+x & x < 1 \\ x^3+3 & x \geq 1 \end{cases}$ için $f'(1^-) + f'(-2) = ?$

$$f'(x) = \begin{cases} 6x+1, & x < 1 \\ 3x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

$$f'(-2) = 6 \cdot (-2) + 1 = -11$$

$$3 + (-11) = -8 //$$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x + a & x < 0 \\ ax^3 + bx + b & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 3ax^2 + b, & x \geq 0 \end{cases}$
fonksiyonu reel sayılarda türevli ise (a,b) ikilisini bulunuz?

$x=0$ kritik noktasına bakalım.

① önce süreklilik olmalı.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \sin 0 + a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + b = b$$

$$a = b \text{ olmalı}$$

② Türevli de olmalı.

$$f'(0^-) = \cos 0 = 1$$

$$f'(0^+) = 3a \cdot 0^2 + b = b$$

$$1 = b \text{ olmalı.}$$

Dolayısıyla

$$1 = b = a$$

$$(0, b) = (1, 1) //$$

3) $f(x) = |x^2 - 3x + 1| \cdot x$ fonksiyonu için $f'(2)$ değeri varsa bulunuz?

$$x=2 \text{ için } |x^2 - 3x + 1| = |2^2 - 3 \cdot 2 + 1| = \text{negatif}$$

$$f(x) = -(x^2 - 3x + 1) \cdot x$$

$$f(x) = -(x^3 - 3x^2 + x)$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

$$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1$$

$$f'(2) = -12 + 12 - 1$$

$$f'(2) = -1 //$$

4) $f(x) = |x| \cdot x$ fonksiyonu için $f'(0)$ değeri varsa bulunuz?

$x=0$ kritik nokta.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$x=0$ 'da sürekli olduğu görüldü.

$$f'(0^-) = -2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0^+) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$$

olduğundan

$$f'(0) = 0 //$$

5) $f(x) = |x^3 - 8| \cdot x$ fonksiyonu kaç noktada türevsizdir?

$$f(x) = \begin{cases} (x^3 - 8) \cdot x, & x \geq 2 \\ (-x^3 + 8) \cdot x, & x < 2 \end{cases}$$

$x=2$ 'yi inceleyelim.

① önce süreklilik

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = (-2^3 + 8) \cdot 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = (2^3 - 8) \cdot 2 = 0$$

Süreklilik

HATA!

En büyük k tamsayısı sorulmalı

6) $f(x) = |2x^2 - x + k|$ fonksiyonu iki noktada türevsiz ise en küçük k tamsayısı kaçtır?

sadece $x=2$ 'de Türevsiz.

Demek ki x^2 'li bu polinom fonksiyonun iki kökü var ki mutlak değerden dolayı iki noktada türevsiz.

$$\Delta > 0 \text{ olmalı.}$$

$$(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k > 0$$

$$1 > 8k$$

$$\frac{1}{8} > k$$

en büyük k tamsayısı 0 dur. //