

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

TÜREV ALMA KURALLARI BÖLÜM 3

TÜREVDE BİLEŞKE KURALI

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ olmak üzere,
 $g \circ f: A \rightarrow C$ verilsin. f fonksiyonu x
noktasında ; g fonksiyonu ise $f(x)$
noktasında türevlenebiliyorsa $(g \circ f)(x)$
fonksiyonu x noktasında türevlidir ve

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

olarak tanımlanmıştır

Örnek...1:

$f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$ olarak veriliyor,

a) $(f \circ g)'(x) = ?$

b) $(g \circ f)'(x) = ?$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(x^2 + 1) \\ (x^2 + 1)^2 - 1 \\ x^4 + 2x^2 \\ &\xrightarrow{\text{türevle}} \\ &= 4x^3 + 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 1) \\ &= (x^2 - 1)^2 + 1 \\ x^4 - 2x^2 + 2 &\xrightarrow{\text{türevle}} \\ &= 4x^3 - 4x \end{aligned}$$

Örnek...2:

$f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = x^3 + 2$ olarak veriliyor,

a) $(f \circ g)'(2) = ?$

b) $(g \circ f)'(2) = ?$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(2) &= f'(g(2)) \cdot g'(2) \\ f'(x) &= 2x - 3 \rightarrow f'(2) = 4 - 3 = 1 \\ g'(x) &= 3x^2 \rightarrow g'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12 \\ g(2) &= 10 \\ f'(10) &= 20 - 3 = 17 \\ (f \circ g)'(2) &= 17 \cdot 12 = 204 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(2) &= g(f(2)) \\ f(2) &= 4 - 6 = -2 \\ f'(2) &= 4 - 3 = 1 \\ g'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 = 12 \\ (g \circ f)'(2) &= 12 \cdot 1 = 12 \end{aligned}$$

Örnek...3:

$f(x) = 3x^2 - x$ ise $(f \circ f)'(1) = ?$

$$f'(x) = 6x - 1$$

$$(f \circ f)'(1) = f'(f(1)) \cdot f'(1)$$

$$f(1) = 3 - 1 = 2$$

$$= f'(2) \cdot 5$$

$$f'(1) = 6 - 1 = 5$$

$$= 11 \cdot 5$$

$$f'(2) = 12 - 1 = 11$$

$$= 55$$

NOT

$y = u(x)$, x e bağlı bir fonksiyon ise,
 $y = f(u) \rightarrow y' = f'(u) \cdot u'$ biçimindedir.

Örneğin $y = f(x^2 + x) \rightarrow y' = f'(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$ dir.

Örnek...4:

$f(x^2 - x) = 6x^3 - 2$ ise pozitif x için $f'(2) = ?$

$$f'(x^2 - x) \cdot (2x - 1) = 18x^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) \cdot 3 &= 18 \Rightarrow f'(2) = 6 \\ f'(2) \cdot -3 &= 18 \Rightarrow f'(2) = -6 \end{aligned}$$

Örnek...5:

$f(x^3) = 2x^2 - 5x + 6$ ise $f'(-8) = ?$

$$f'(x^3) \cdot 3x^2 = 4x - 5$$

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f'(8) \cdot 12 = 8 - 5 \Rightarrow f'(8) = \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

BİLEŞKE VE KUVVET KURALININ GENELLEMESESİ

$$y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

Örnek...6:

$y = f(x) = (x^3 + 8x^2 - 6x + 1)^3$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^3 + 8x^2 - 6x + 1)^2 \cdot (3x^2 + 16x - 6)$$

Örnek...7:

$f(x) = (x^2 - x - 1)^8$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \cdot (x^2 - x - 1)^7 \cdot (2x - 1)$$

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

Örnek...8 :

$$f(x) = (x^3 + x)^3 + (4 - 2x)^2 \text{ ise } f'(0) = ?$$

$$f'(x) = 3(x^3 + x)^2 \cdot (3x^2 + 1) + 2(4 - 2x) \cdot (-2)$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) = -16$$

Örnek...9 :

$$g(5) = -3, g'(5) = -2 \text{ ve } f(x) = g^4(x^3 - 3) \text{ ise } f'(2) = ?$$

$$f'(x) = 4 \cdot g^3(x^3 - 3) \cdot g'(x^3 - 3) \cdot 3x^2$$

$$f'(2) = 4 \cdot g^3(5) \cdot g'(5) \cdot 12$$

$$= 4 \cdot (-3)^3 \cdot (-2) \cdot 12 \checkmark$$

$$= 2592$$

Örnek...10 :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2} \text{ ise } f'(3) = ?$$

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 3x + 2)^{-1/2} \cdot (2x + 3)$$

$$f'(3) = \frac{1}{2} \cdot (20)^{-1/2} \cdot 9 = \frac{9}{2 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{4\sqrt{5}}$$

Örnek...11 :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} \text{ ise } f'(1) = ?$$

$$f(x) = (x + x^{1/2})^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x + x^{1/2})^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2} x^{-1/2})$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} (1 + 1)^{-1/2} \cdot (1 + \frac{1}{2} \cdot 1^{-1/2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}}$$

Örnek...12 :

$$g^2(x^3 + 1) = f^3(x^2 + 1) \cdot h(3x - 1) \text{ için}$$

$f(2) = 3$	$g(2) = -2$	$h(2) = -1$
$f'(2) = 4$	$g'(2) = 1$	$h'(2) = ?$

$$2 \cdot g(x^3 + 1) \cdot g'(x^3 + 1) \cdot 3x^2 =$$

$$3 \cdot f^2(x^2 + 1) \cdot f'(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot h(3x - 1) + h'(3x - 1) \cdot 3 \cdot f^3(x^2 + 1)$$

$$x=1 \Rightarrow 2 \cdot g(2) \cdot g'(2) \cdot 3 = 3 \cdot f^2(2) \cdot f'(2) \cdot 2 \cdot h(2) + h'(2) \cdot 3 \cdot f^3(2)$$

$$2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 3 = 3 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-1) + h'(2) \cdot 3 \cdot 3^3$$

$$-12 = -216 + 81 \cdot h'(2)$$

$$h'(2) = \frac{204}{81} = \frac{68}{27}$$

Örnek...13 :

$$f(x) = 2x^2 - 3x \text{ ve } g(x) = x - x^2, h(x) = 3x - 4 \text{ ise } (h \circ g \circ f)'(2) = ?$$

$$[h \circ (g \circ f)]'(2) = h'[(g \circ f)(2)] \cdot (g \circ f)'(2)$$

$$h'(x) = 3$$

$$g'(x) = 1 - 2x$$

$$f'(x) = 4x - 3$$

$$f(2) = 8 - 6 = 2$$

$$3 \cdot g'(2) \cdot f'(2)$$

$$3 \cdot (1 - 4) \cdot (8 - 3)$$

$$3 \cdot (-3) \cdot 5 = -45$$

ZİNCİR KURALI

$$\begin{aligned} y &= f(u) \\ u &= g(t) \text{ ise } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ t &= h(x) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Örnek...1 :

$$y = u^2 - 2u, u = x^3 - x \text{ ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= (2u - 2) \cdot (3x^2 - 1)$$

$$= [2(x^3 - x) - 2] \cdot (3x^2 - 1)$$

üçerik
tek değişken
cinsinden

Örnek...2 :

$$y = 3x^2 - 2x, x = \frac{1}{u}, u = n^2 - 3n + 1$$

$$\text{olduğuna göre, } \frac{dy}{dn} \text{ } n=0 \text{ için kaçtır?}$$

$$\frac{dy}{dn} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dn}$$

$$= (6x - 2) \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot (2n - 3)$$

$$\frac{dy}{dn} = (6 - 2) \cdot \left(-\frac{1}{1^2}\right) \cdot (2 \cdot 0 - 3)$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 12$$

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

Örnek...3 :

$$y=t^2+5t, t=6u^2, u=2x-3 \text{ ise } \frac{dy}{dx} \text{ } x=1 \text{ için}$$

kaçtır?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$x=1$$

$$u=2-3=-1$$

$$t=6, (-1)^2=6$$

$$= (2+5) \cdot 12 \cdot 2$$

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} = (2+5) \cdot 12 \cdot (-1) \cdot 2$$

$$= 17 \cdot 12 \cdot (-2) = -408$$

PARAMETRİK FONKSİYONLAR

$t \in [a,b]$ bir reel değişken olmak üzere, $x=f(t)$ ve $y=g(t)$ olarak tanımlanmış fonksiyonlar ise $(x,y)=(f(t),g(t))$ noktalarının oluşturduğu kümeye parametrik eğri; t ye ise parametre denir.

Örnek...1 :

$0 \leq t \leq 1$ olmak üzere, $x=3t$ ve $y=2-t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğriyi bulunuz?

$$x=3t$$

$$+ y=2-t \quad | \cdot 3$$

$$x+3y=6 \quad (\text{doğruyu})$$

Örnek...2 :

$0 \leq t \leq 2\pi$ olmak üzere, $x=a \cdot \cos t$ ve $y=a \cdot \sin t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğriyi belirtiniz?

$$x=a \cos t \Rightarrow x^2=a^2 \cos^2 t$$

$$y=a \sin t \Rightarrow y^2=a^2 \sin^2 t$$

$$x^2+y^2=a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$x^2+y^2=a^2 \quad (\text{çemberi, } a>0)$$

PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$x=f(t)$ ve $y=g(t)$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}$ ' i bulmak için $\frac{dy}{dx}$ ifadesinde pay ve payda dt ile bölünür.

$$x=f(t), y=g(t) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

olarak hesaplanır.

Örnek...3 :

$x=t^2$ ve $y=t^2+2t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t+2}{2t} = \frac{t+1}{t}$$

Örnek...4 :

$x=t^3$ ve $y=5-t^2+t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-2t+1}{3t^2}$$

Örnek...5 :

$x=t^3-t+3$ ve $y=t-t^2$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}$ $t=2$ için kaçtır?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-2t}{3t^2-1}$$

$$t=2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-4}{12-1} = \frac{-3}{11}$$

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

DEĞERLENDİRME

1) $f(x)=2x^3+3x$, $g(x)=x^3-4$ ise $(f \circ g)'(1)=?$

$$\begin{aligned} f'(g(1)) \cdot g'(1) &= f'(1) \cdot g'(1) \\ f'(1) &= 6x^2+3 \\ g'(1) &= 3x^2 \\ f'(1) &= 6 \cdot 1^2+3=9 \\ g'(1) &= 3 \cdot 1^2=3 \\ (f \circ g)'(1) &= 9 \cdot 3 = 27 \end{aligned}$$

2) $f(2x^3+3)=6x^2-3x+2$ ise $f'(1)=?$

$$\begin{aligned} f'(2x^3+3) \cdot 6x^2 &= 6x^2-3x+2 \\ f'(1) \cdot 6 &= -12-3 \\ f'(1) &= -15/6 = -5/2 \end{aligned}$$

3) $f(x)=(2x^4-3x+1)^5$ ise $f'(2)=?$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(2x^4-3x+1)^4 \cdot (8x^3-3) \\ f'(2) &= 5 \cdot (27)^4 \cdot 61 \end{aligned}$$

4) $f^2(x^2-2)=g^2(\frac{x^3}{2}-2) \cdot h(2x^2-3x)$ için

$f(2)=1$, $g(2)=4$, $h(2)=-2$, $f'(2)=-2$ ve $g'(2)=-3$ olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?

$$\begin{aligned} 2f(x^2-2) \cdot f'(x^2-2) \cdot 2x &= 2g(\frac{x^3}{2}-2) \cdot g'(\frac{x^3}{2}-2) \cdot \frac{3x^2}{2} \\ &\quad + h(2x^2-3x) \cdot h'(2x^2-3x) \cdot (4x-3) \cdot g^2(\frac{x^3}{2}-2) \end{aligned}$$

$x=2 \Rightarrow 2f(2) \cdot f'(2) \cdot 4 = 2g(2) \cdot g'(2) \cdot 6 + h(2) \cdot h'(2) \cdot 5 \cdot g^2(2)$

$h'(2) = -19/4$

5) $f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ ise $f'(1)=?$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} (x+\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-2/3} \cdot (1+\frac{1}{2}(\sqrt{x+\sqrt{x}})^{-1/2}) \\ f'(1) &= \frac{1}{3} (1+\sqrt{2})^{-2/3} \cdot (1+\frac{1}{2\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

6) $y=x^2-2x$, $x=u^3+5u-32$ ise $\frac{dy}{du}=?$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du} \\ &= (2x-2) \cdot (3u^2+5) \\ &= [2(u^3+5u-32)-2] \cdot (3u^2+5) \end{aligned}$$

7) $y=x^2+3x$, $x=t^3+t$, $t=u^2-3u+1$ ise $\frac{dy}{du}$, $u=0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \\ &= (2x+3) \cdot (3t^2+1) \cdot (2u-3) \\ &= 7 \cdot 4 \cdot (-3) = -84 \end{aligned}$$

8) $x=2t^3-3t^2+4t+1$ ve $y=2t^2+3t$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}=?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{4t+3}{6t^2-6t+4}$$

9) $x=t-t^2+t^3$ ve $y=3t^3$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}$ $t=1$ alınırsa kaç eşit olur?

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{9t^2}{1-2t+3t^2} \\ t=1 &\Rightarrow \frac{9}{1-2+3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

10) $x=t^3-2t$ ve $y=(t-2)(\sqrt{3-2t^2+t^3})$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}$ $t=1$ için kaç eşit olur?

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2-2}{\sqrt{3-2t^2+t^3} + (t-2) \cdot \frac{1}{2}(3-2t^2+t^3)^{-1/2} \cdot (-4t+3t^2)} \\ &= \frac{3-2}{\sqrt{3-2+1} + (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{-1/2} \cdot (-1)} = \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

11) $x=(\sqrt{t-2t^2+t^3})$ ve $y=3t^3$ parametrik eşitlikleri ile verilen eğri için $\frac{dy}{dx}$ $t=2$ için kaçtır?

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{9t^2}{\frac{1}{2}(t-2t^2+t^3)^{-1/2} \cdot (1-4t+3t^2)} \\ t=2 &\Rightarrow \frac{36}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 5} = \frac{72\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$f: A \rightarrow B$ $y=f(x)$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f nin tersi vardır. $y=f(x)$ verilip ters fonksiyonun türevi soruluyorsa doğrudan $f^{-1}(x)$ fonksiyonu bulunur ve sonra türevi alınır. Eğer sadece ters fonksiyonun türevinde değer arıyorsak yer değiştirme ile bileşke fonksiyona türev uygulayarak da sonuca gidebiliriz.

Bu anlattıklarımızı formülleştirebilirsek,
 $f^{-1}: B \rightarrow A$ ve $(f)(x_0)=y_0$ olmak üzere,
 $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{(f)'(x_0)}$ dir.

Örnek...1 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x)=3x+5$ ise $(f^{-1})'(x)=?$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}$$

Örnek...2 :

$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}, f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ ise $(f^{-1})'(x)=?$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{x-3}$$

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{2(x-3) - (2x-5)}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2}$$

Örnek...3 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^3+2}$ ise $(f^{-1})'(x)=?$

$$\sqrt[3]{x^3+2} = y \Rightarrow x^3+2 = y^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y^3-2}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^3-2} = (x^3-2)^{1/3}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3} (x^3-2)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$$

Örnek...4 :

$f: (0, \infty) \rightarrow (-4, \infty), f(x) = x^2-4$ ise $(f^{-1})'(x)=?$

$$y = x^2-4 \Rightarrow \sqrt{y+4} = |x| \rightarrow x = \sqrt{y+4}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}}$$

Örnek...5 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3+2$ ise $(f^{-1})'(3)=?$

$$[f^{-1}(x^3+2) = x]'$$

$$(f^{-1})'(x^3+2) \cdot 3x^2 = 1 \quad x=1$$

$$(f^{-1})'(3) \cdot 3 = 1 \quad (f^{-1})'(3) = \frac{1}{3}$$

Örnek...6 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^5+2$ ise $(f^{-1})'(34)=?$

$$f^{-1}(x^5+2) = x$$

$$(f^{-1})'(x^5+2) \cdot 5x^4 = 1 \quad x=2$$

$$(f^{-1})'(34) \cdot 80 = 1$$

$$(f^{-1})'(34) = \frac{1}{80}$$

Örnek...7 :

$f(x) = x^3+x$ ise $(f^{-1})'(30)=?$

$$f^{-1}(x^3+x) = x$$

$$(f^{-1})'(x^3+x) \cdot (3x^2+1) = 1 \quad x^3+x=30 \quad x=3$$

$$(f^{-1})'(30) \cdot 28 = 1$$

$$(f^{-1})'(30) = \frac{1}{28}$$

Örnek...8 :

$f: \mathbb{R} - \{-5\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}, f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$ ise $(f^{-1})'(1)=?$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x-3}{x-2} \quad (f^{-1})'(x) = \frac{-5(x-2) - (-5x-3)}{(x-2)^2}$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{13}{(-1)^2} = 13$$

TÜREV - 3

(BİLEŞKENİN TÜREVİ , ZİNCİR KURALI , PARAMETRİK TÜREV , TERS FONKSİYON TÜREV ALMA KURALLARI)

DEĞERLENDİRME

- 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = 4x - 7$ ise $(f^{-1})'(x) = ?$

$$f(x) = \frac{x+7}{4}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}$$

- 2) $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}, f(x) = \frac{4x-7}{3x-5}$ ise
 $(f^{-1})'(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$f^{-1}(x) = \frac{5x-7}{3x-4}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{5(3x-4) - 3(5x-7)}{(3x-4)^2} = \frac{1}{3x-4}$$

4/3
-
+

$$G_k = \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$$

- 3) Uygun şartlarda tanımlı $f(x) = \sqrt{x+2}$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(x) = ?$

$$y = \sqrt{x+2} \rightarrow y^2 = x+2 \rightarrow x = y^2 - 2$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

$$(f^{-1})'(x) = 2x$$

- 4) $f: (-\infty, -3) \rightarrow (-6, \infty), f(x) = x^2 + 6x + 3$ ise $(f^{-1})'(x) = ?$

$$y = x^2 + 6x + 3$$

$$y = (x+3)^2 - 6$$

$$\sqrt{y+6} = |x+3|$$

$$\sqrt{y+6} = -x-3$$

$$x = -\sqrt{y+6} - 3$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x+6} - 3$$

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+6}}$$

- 5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{17} + 2$ ise $(f^{-1})'\left(\frac{1}{17}\right) = ?$

$$f(x) = x^{17} + 2$$

$$f^{-1}(x^{17} + 2) = x$$

$$(f^{-1})'(x^{17} + 2) \cdot 17 \cdot x^{16} = 1 \quad x = -1$$

$$(f^{-1})'(1) \cdot 17 = 1$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{17}$$

- 6) Uygun şartlarda tanımlı $f(x) = x - \sqrt{x}$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(6) = ?$

$$f^{-1}(x - \sqrt{x}) = x$$

$$(f^{-1})'(x - \sqrt{x}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 1$$

$$x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9$$

$$(f^{-1})'(6) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1$$

$$(f^{-1})'(6) = \frac{6}{5}$$