

TÜREV - 1

(TÜREV TANIMI - TÜREV FONKSİYONU - TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ)

KAVRAM OLARAK TÜREV

BİR NOKTADA TÜREV

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi denir. f fonksiyonun x_0 noktasındaki türevi $f'(x_0)$ $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ sembollerinden biri ile gösterilebilir. Eğer bir fonksiyonun x_0 noktasında türevi varsa fonksiyon o noktada türevlenebilir denir.

Örnek...1 :

$f(x) = x^2$ fonksiyonu için $x=2$ noktasındaki türevi türev tanımını kullanarak bulunuz.

$x_0 = 2$ demek ki

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4// \end{aligned}$$

HATIRLATMA:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ değerinin olabilmesi için $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ olması gerekirdi. Benzer şekilde f fonksiyonun x_0 noktasında türevinin yani $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ limitinin olabilmesi için

(1) $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ ve

(2) $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$ limitlerinin mevcut olması ve bu limitlerin birbirine eşit olması gerekir.

Burada (1) e fonksiyonun $x=x_0$ noktasında sağdan türevi (2) ye ise fonksiyonun $x=x_0$ noktasında soldan türevi denir. Kritik noktaya sahip fonksiyonlar eğer

1. bu noktada süreklili
2. bu noktada sağdan ve soldan aynı türev değerlerine sahipse, türeve sahiptir.

Örnek...2 :

$f(x) = |x|$ fonksiyonun $x=0$ noktasında türevi var mıdır? Bu noktadaki sağ ve sol türevleri hesaplayarak araştırınız.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x) - (0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

sağ türev $\neq$ sol türev. Türev yok //

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ noktasında türevli midir?

fonksiyonun sürekli olduğu incelendiğinde görülecektir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+x+1) = 1+1+1 = 3// \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

sağ türev $\neq$ sol türev olduğundan Türevli değil.

Örnek...4 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda türevli midir?

$x < 1$ için $2x-3$ fonksiyonu doğrusaldır ve tanımlandığı k-mede hem sürekli hem de sağ ve sol limitleri aynıdır. Yani türevlidir. Aynı şey $x \geq 1$ için x^2 fonksiyonunda da geçerlidir. Burada tek incelenmesi gereken kritik nokta 1 noktasıdır.

$f(x)$ 'ın tüm $\mathbb{R}$ 'de sürekli olduğu bellidir.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x-3) - (2 \cdot 1 - 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2// \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

1/4

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2//$$

sağ türev = sol türev olduğundan Türev var ve 2 //

TÜREV - 1

(TÜREV TANIMI - TÜREV FONKSİYONU - TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ)

NOT

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \text{ ifadesinde } x = x_0 + h$$

alınırsa $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$ olarak yeniden yazılmış olur.

Burada

$x = x_0 + h$ için

$x_0 = 5$

$x \rightarrow x_0$ iken

$h \rightarrow 0$ olmakta

Örnek:

$y = f(x) = 3x + 1$ fonksiyonu için $f'(5) = ?$

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(5+h) - f(5)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(5+h) - f(5)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{(3(5+h) + 1) - (3 \cdot 5 + 1)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{15 + 3h + 1 - 16}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3h}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} 3 \\ &= 3 // \end{aligned}$$

TÜREV FONKSİYONU

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
 $[a, b]$ nin alt kümesinden $\mathbb{R}$ ye

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyona f fonksiyonun türev fonksiyonu denir.

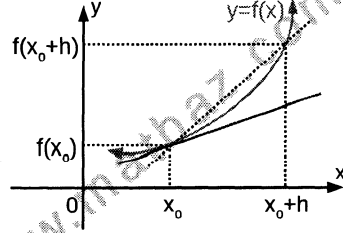
Bu herhangi bir x noktasında

(yani her noktada)

türev demektir. Yani x_0 'ı " x " almak demektir.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{((x+h)^2 + 1) - (x^2 + 1)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2xh + h^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h(2x + h)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 \\ &= 2x // \end{aligned}$$

TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ



Şekilden de anlaşılacağı gibi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right) \text{ limit değeri eğer}$$

varsa $x = x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimini verir. Başka bir deyişle $f'(x_0)$ değeri $y = f(x)$ eğrisine $x = x_0$ noktasında çizilen teğetin eğimidir.

TEOREM (TÜREV SÜREKLİLİK İLİŞKİSİ)

Bir fonksiyon bir noktada **türevli** ise o noktada **süreklidir**.

TEOREMİN SONUÇLARI

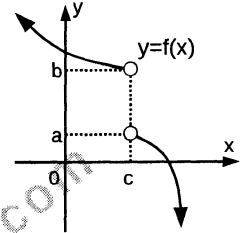
- 1) $f(x)$ fonksiyonu herhangi bir noktada **süreklidir** değilse bu noktada **türevli de değildir**.
- 2) $f(x)$ fonksiyonu sürekli iken türevli **olmayabilir**.

Örneğin $f(x)$ grafiğinde köşelere sahip olduğu noktalarda türev değerine sahip değildir.

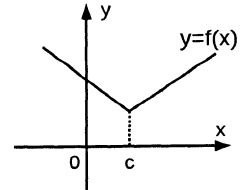
Aşağıdaki örneğin şekillerini inceleyiniz.

Örnek...7 :

- a) $y = f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında süreksiz olduğundan türevsizdir.



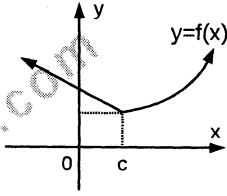
- b) $y = f(x)$ fonksiyonu $x = c$ noktasında köşeye sahip olduğundan türevsizdir.



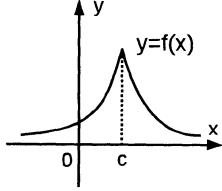
TÜREV - 1

(TÜREV TANIMI - TÜREV FONKSİYONU - TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ)

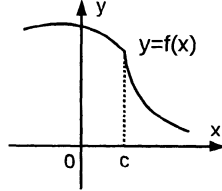
c)
y=f(x) fonksiyonu x=c
noktasında köşeye sahip
olduğundan türevsizdir.



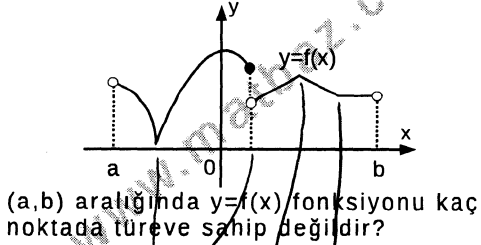
d)
y=f(x) fonksiyonu x=c
noktasında köşeye sahip
olduğundan türevsizdir.



e)
y=f(x) fonksiyonu x=c
noktasında teğetin eğimi
sonsuz olduğundan
türevsizdir.



Örnek...8 :

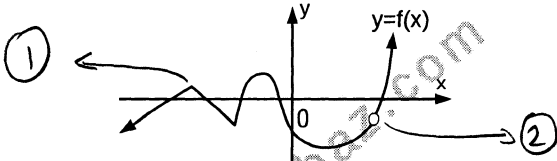


(a,b) aralığında y=f(x) fonksiyonu kaç
noktada türeve sahip değildir?

① ② ③ ④

4 noktada türeve sahip değildir.

Örnek...9 :



Şekilde grafiği verilen y=f(x) fonksiyonunun
kaç noktada türevi yoktur?

2 noktada türevi yoktur//

Örnek...10 :

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - x + a}$$

fonsiyonu R' de türevli ise a nasıl
seçilmelidir?

Demek ki paydasını sıfır yapan bir
değer yok. Yani paydadaki $x^2 - x + a$ 'nin
kökü yok. Bu da $\Delta < 0$ olmasını gerektirir.

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0$$

$$1 - 4a < 0$$

$$\frac{1}{4} < a$$

$\frac{1}{4} < a$ seçilmelidir//

Örnek...11 :

$$f(x) = \begin{cases} 6x + ax^2 & x < 0 \\ 2kx + c + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

fonsiyonu Reel sayılar kümesinde türevli
ise c kaçtır?

$6x + ax^2$ ve $2kx + c + 1$ polinom fonksiyon
olduklarından kendi tanım aralıklarında
hem sürekli hem türevlidirler.

Burada kritik nokta sıfır incelenmelidir.
Tam Reel sayılarda sürekli ise sıfırdan da
sürekli olduğunu söylüyor soru.
Demek ki sürekli.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = 2k \cdot 0 + c + 1 = c + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2k \cdot 0 + c + 1 = c + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 6 \cdot 0 + a \cdot 0^2 = 0$$

$$c + 1 = 0 \text{ ise}$$

$$c = -1 //$$

TÜREV - 1

(TÜREV TANIMI - TÜREV FONKSİYONU - TÜREV TEĞET İLİŞKİSİ)

DEĞERLENDİRME

1) $f(x)=3x+5$ olmak üzere, $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{f(x)-f(4)}{x-4} \right) = ?$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{(3x+5)-(3 \cdot 4+5)}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3x+5-17}{x-4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3x-12}{x-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{3(x-4)}{x-4} \right)$$

$$= 3 //$$

2) $f(x)=3x^2$ ise $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) = ?$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{6xh + 3h^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h)$$

$$= 6x + 3 \cdot 0 = 6x //$$

3) $f(x)=x^3$ fonksiyonu için türev tanımını kullanarak $x=2$ noktasındaki türevini bulunuz.

$x_0=2$ alalım.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 2^3}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 2^2+2 \cdot 2+4 = 12 //$$

fonksiyon sürekli. 4) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3x & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ noktasında türevli midir?

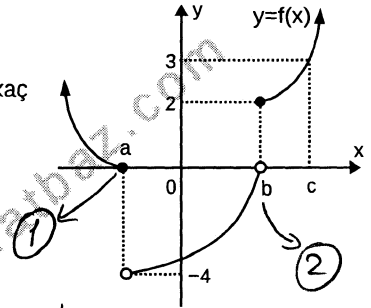
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x-0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x - 3 \cdot 0}{x-0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x}{x} \right)$$

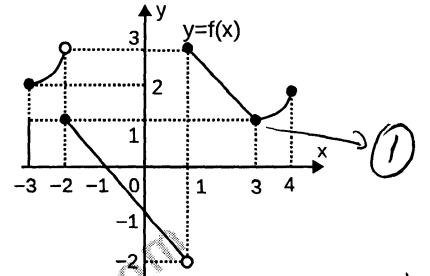
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3) = 3$$

5) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun reel sayılarda kaç noktada türevi yoktur?



2 noktada türevi yoktur. //

6) Yanda grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için, $(-3,4)$ aralığında kaç noktada sürekli olduğu halde türevi yoktur?



Birtek $x=3$ noktasında sürekli olduğu halde türevi yoktur.

Bu grafikte $x=-2$ ve $x=1$ de de türev yoktur fakat o noktalarda sürekli de değildir. Bize

7) $f(x) = \frac{mx+2}{mx^2-x+3}$ fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ de sürekli olup türevli ise m nasıl seçilmelidir? $R - \{a, b\}$ de türevli ise a ve b değerleri payda sıfır yaptığından tanım kümesinden çıkarılmışlardır. Demek ki mx^2-x+3 'ün iki farklı kökü var. Yani $\Delta > 0$ olmalı.

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot m \cdot 3 > 0$$

$$1 - 12m > 0$$

$$\frac{1}{12} > m$$

$m < \frac{1}{12}$ seçilmelidir. Yani

$m, (-\infty, \frac{1}{12})$ aralığından seçilmelidir.

Sol türev $\neq$ sağ türev , türevli değil.