

FONKSİYONLAR BÖLÜM 9

FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMELERİ :

Reel değişkenli ve reel değerli , kuralı $y=f(x)$ şeklinde verilmiş bir fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş reel sayı kümesine o fonksiyonun en geniş tanım kümesi denir ve D_f ile gösterilir.

I) POLİNOM FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİ

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılar olmak üzere, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ biçimindeki ifadeler x e göre yazılmış reel katsayılı polinom;
 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ifadesine ise polinom fonksiyon denir. Polinom fonksiyonların en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

Örnek...1 :

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ fonksiyonu tüm reel sayılar için tanımlıdır.

II) RASYONEL FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİ

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki ifadeler rasyonel fonksiyon denir. Rasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümesi $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$ kümesidir.

Örnek...2 :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$0 = x^2 - 1$ için f tanımlıdır.
 $x = 1$ ve $x = -1$ tanım kümesinden çıkarılır.

$$T.K = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Örnek...3 :

$$g(x) = \frac{x+21}{x^3 + 5x^2 + 6x}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 + 6x &= 0 \\ x(x^2 + 5x + 6) &= 0 \\ x(x+3)(x+2) &= 0 \\ x=0, x=-3, x=-2 \end{aligned} \quad T.K = \mathbb{R} - \{-3, -2, 0\}$$

Örnek...4 :

$$h(x) = \frac{1}{mx^2 - 5x + 4}$$

tüm reel sayılarda tanımlı ise m nin seçimi nasıl olmalıdır?

$$\begin{aligned} T.K = \mathbb{R} \Rightarrow mx^2 - 5x + 4 \neq 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4m \cdot 4 < 0 \\ 16m > 25 \quad m > \frac{25}{16} \\ m \in \left(\frac{25}{16}, \infty \right) \end{aligned}$$

III) İRRASYONEL FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİ

I) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x)$ in tanımlı olduğu her noktada tanımlıdır.

Örnek...5 :

$$f(x) = \sqrt[125]{x^3 + 8x}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Kök derecesi tek $x^3 + 8x$ her yerde tanımlıdır. $T.K = \mathbb{R}$

Örnek...6 :

$$g(x) = \sqrt[3]{-x}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$T.K = \mathbb{R} \quad (\text{Derece tek})$$

Örnek...7 :

$$h(x) = \sqrt[5]{\frac{1}{x^2 - x}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \quad x=0, x=1 \\ \text{derece tek} \quad T.K &= \mathbb{R} - \{0, 1\} \end{aligned}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 9

(FONKSİYONLARIN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ)

II) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan her noktada tanımlıdır.

Örnek...8 :

$$f(x) = \sqrt[4]{x-4}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

Derece çiftken içersi negatif olamaz!

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$T.K = [4, \infty)$$

Örnek...9 :

$$f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 2x + a}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini reel sayılar ise a nasıl seçilmelidir?

$$x^2 - 2x + a \geq 0 \quad (\Delta \leq 0)$$

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a \leq 0$$

$$4 \leq 4a$$

$$a \geq 1$$

$$a \in [1, \infty)$$

Örnek...10 :

$$h(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

içersi negatif olmaz (pay 0 da olmaz!)

$$T.K = \mathbb{R}$$

Örnek...11 :

$$h(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$\frac{x}{x^2 - 1} \geq 0 \quad \text{Tablo} \quad x=0 \quad x=\pm 1$$

$\frac{x}{x^2-1}$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
	-	+	+	-	+

$$T.K = (-1, 0] \cup (1, \infty)$$

IV) LOGARITMA FONKSİYONLARIN TANIM KÜMESİ

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $f(x) = a^x$ fonksiyonun ters fonksiyonuna a tabanına göre logaritma fonksiyonu denir.

$f(x) = \log_{a(x)} g(x)$ fonksiyonun en geniş tanım kümesi,

$$g(x) > 0, h(x) > 0 \text{ ve } h(x) \neq 1$$

eşitsizliklerini sağlayan noktalardır.

Örnek...12 :

$$f(x) = \log_2(x+2)$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$x+2 > 0 \quad x > -2 \quad T.K = (-2, \infty)$$

(Tabanla ilgili sıkıntı yok taban 2)

Örnek...13 :

$$f(x) = \log_{x^2}(x^2 + 8x + 15)$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$x^2 + 8x + 15 > 0$$

$$(x+3)(x+5)$$

$$x^2 > 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq 0, -1, 1$$

	-5	-3	
$x^2 + 8x + 15$	+	-	+

$$T.K = [(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)] - \{0, -1, 1\}$$

Örnek...14 :

$$f(x) = \log_{x^2-x-2}(x^2-10)$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$x^2 - 10 > 0$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x^2 - x - 2 \neq 1$$

$$(x-2)(x+1)$$

$$x^2 - x - 3 \neq 0$$

$$\text{Köklere } \pm \sqrt{10}$$

$$2, -1$$

	$-\sqrt{10}$	-1	2	$\sqrt{10}$
$x^2 - 10$	+	-	-	+
$x^2 - x - 2$	+	+	-	+

$$x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 12 = 13 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$T.K = (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}, \infty) \quad \text{bu bölüklere giriyor!}$$

Örnek...15 :

$$f(x) = \frac{x^3}{8^x - 27}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$8^x = 27 \Rightarrow 2^{3x} = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$$

$$T.K = \mathbb{R} - \{ \log_2 3 \}$$

Örnek...16 :

$$f(x) = \ln(x-2)$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$\ln(x-2) \geq 0 \quad x-2 > 0$$

$$x-2 \geq e^0 = 1 \quad x > 2$$

$$x \geq 3 \quad \leftarrow \text{beraber}$$

$$T.K [3, \infty)$$

Örnek...17 :

$$f(x) = \log_3(\log x + 1)$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$$\log x + 1 > 0 \quad x > 0$$

$$\log x > -1 \quad x > 10^{-1}$$

$$x > \frac{1}{10} \quad \left(\frac{1}{10}, \infty \right) = T.K$$

Örnek...18 :

$f(x) = \log_3(x-3)$ ve $g(x) = x^2 - 1$ fonksiyonları veriliyor. $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$$x-3 > 0$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \log_3(x^2 - 1 - 3) = \log_3(x^2 - 4)$$

$$x^2 - 4 > 0$$

	-2	2	3
$x-3$	-	-	-0+
x^2-4	+0-	-0+	+
$x > 3$			$T.K (3, \infty)$

Örnek...19 :

$$f(x) = \frac{x}{\log x - \ln x}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$$\log x - \ln x \neq 0 \quad \log x \neq \ln x$$

$$\log x = \ln x \Rightarrow x = 1$$

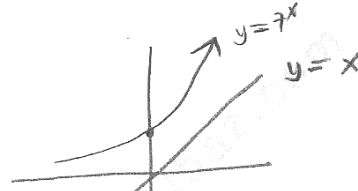
$$T.K = \mathbb{R} - \{1\}$$

Örnek...20 :

$$f(x) = \frac{6-2x}{7^x - x}$$

fonksiyonu kaç noktada tanımsızdır?

$$7^x - x \neq 0 \quad \text{grafikte bakalım.}$$



ortak nokta yok $7^x \neq x$

$$T.K = \mathbb{R}$$

DEĞERLENDİRME

- 1) $f(x) = \frac{x+3}{2x^2-5x+m}$
tüm reel sayılarda tanımlı ise m nin seçimi nasıl olmalıdır?

$$2x^2-5x+m \neq 0 \quad \Delta < 0$$

$$25-4 \cdot 2 \cdot m < 0 \quad m > \frac{25}{8}$$

- 2) $h(x) = \sqrt{x^2-6x+m}$
fonksiyonu reel sayılarda kümesinde tanımlı ise m kaçtır?

$$x^2-6x+m \geq 0 \rightarrow \Delta \leq 0$$

$$36-4 \cdot 1 \cdot m \leq 0 \Rightarrow m \geq 9$$

- 3) $h(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2-x-12}}$
fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$x^2-x-12 \neq 0 \quad T.K. = \mathbb{R} - \{-3, 4\}$$

$$(x-4)(x+3) \neq 0$$

(DERECE TEK!)

- 4) $h(x) = \sqrt[8]{\frac{x^3+1}{x^3-2x^2-8x}}$
fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz? DERECE ÇİFT

$$-1 \leftarrow \frac{x^3+1}{x^3-2x^2-8x} \geq 0$$

$$x \frac{(x^2-2x-8)}{(x-4)(x+2)} \rightarrow 0, -2, 4$$

$$(x-4)(x+2) \leq 0$$

-2	-1	0	4
+	-	+	-
+++	---	+++	---

$(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup (4, \infty)$

- 5) $\psi(x) = \sqrt[8]{\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-2}}$
fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-2} \geq 0 \quad \frac{x-2-2x-6}{(x-2)(x+3)} = \frac{-x-8}{(x-2)(x+3)}$$

-3	2	8
+	-	+
+++	---	+++

$T.K. = (-\infty, -3) \cup (2, 8]$

- 6) $f(x) = \frac{x}{x-\cos x}$
fonksiyonu kaç noktada tanımsızdır?

Grafik çözümü $x-\cos x = 0$ köklerini bulun

tek çözüm var
1 noktada tanımsızdır

- 7) $\Psi(x) = \sqrt[8]{16-x^2}$
fonksiyonun en geniş tanım kümesi T ise $T - \Psi(T) = ?$

$$16-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\Psi(T) = [0, 16] \quad (\text{Görüntü kümesi})$$

$$T - \Psi(T) = [-4, 0]$$

- 8) $\psi(x) = \sqrt[8]{\frac{4-|x|}{x^2-3}}$
fonksiyonunun tam sayılar kümesinde en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$4-|x| \geq 0 \quad (\text{paydadana tanıyı kök çıkar})$$

$$4 \geq |x| \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$T.K. = \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$$

- 9) $\Omega(x) = \log_3(x^2-x-12)$
fonksiyonunu tanımsız yapan tamsayıların toplamını bulunuz?

$$x^2-x-12 \leq 0 \quad (\text{tanımsızdır})$$

$$(x-4)(x+3) \leq 0$$

-3	4
+	-
+++	---

$$(-3) + (-2) + (-1) + \dots + (4) = 4/4$$

- 10) $f(x) = \log(\ln x - 2)$
fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz?

$$\ln x - 2 > 0 \Rightarrow \ln x > 2$$

$$x > e^2$$

$T.K. = (e^2, \infty)$