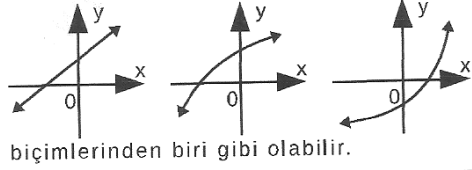


FONKSİYONLAR BÖLÜM 8

ARTAN AZALAN FONKSİYONLAR

ARTAN FONKSİYON

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.
Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna A kümesinde artan fonksiyon denir. Artan bir fonksiyonun grafiği



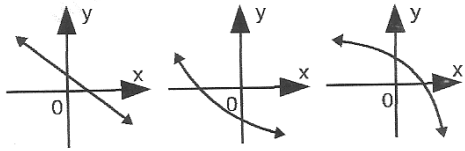
Örnek...1 :

$f(x) = 2x + 5$ fonksiyonu artan mıdır?

eğimi pozitif olan ($m=2$) bir doğrudur.

AZALAN FONKSİYON

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.
Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu B kümesinde azalan fonksiyondur denir.



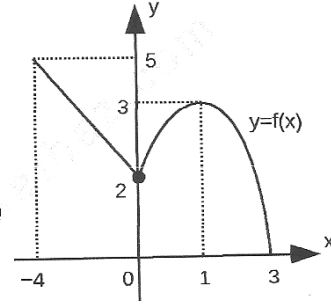
Örnek...2 :

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{k}{x}$ fonksiyonun artan olma koşulu nedir?

$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ ise doğru
ters durum $\frac{k}{x_1} < \frac{k}{x_2}$ ($f(x_1) < f(x_2)$)
olması için $k < 0$ olmalı !!!

Örnek...3 :

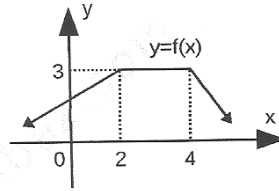
$[-4, 3]$ aralığında grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları yazınız?



funksiyon $(-4, 0) \cup (1, 3)$ aralıklarında azalan
 $(0, 1)$ aralığında artandır

Örnek...4 :

Grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun artan olduğu aralık A ve azalan olduğu aralık B ise $A \cap B$ kümesini bulunuz?



$$A = (-\infty, 2)$$

$$B = (4, \infty)$$

$$(A \cup B)^c = [2, 4]$$

$$A \cap B = (A \cup B)^c$$

$$A \cup B = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Örnek...5 :

Tanımlı oldukları en geniş kümede aşağıda verilen fonksiyonların artanlık ve azalanlıklarını belirtiniz?

a) $f(x) = 2x + 5$

$\mathbb{R}$ de artan

b) $g(x) = x^2 + 5$

$(-\infty, 0)$ azalan

$(0, \infty)$ artan



c) $h(x) = \ln x$

$\mathbb{R}^+$ de tanımlı ve artan

d) $p(x) = x^3 + 1$

$\mathbb{R}$ de artan

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

ARTMAYAN VE AZALMAYAN FONKSİYONLAR

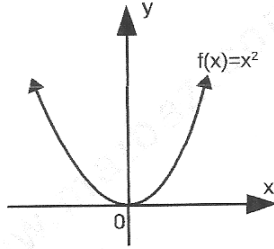
$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ise f fonksiyonu B kümesinde artmayan fonksiyondur denir.

$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ise f fonksiyonu B kümesinde azalmayan fonksiyondur denir.

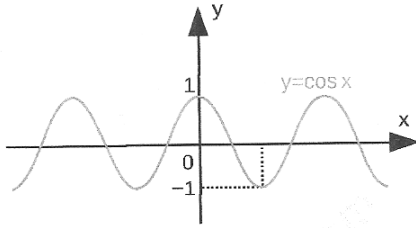
ÇİFT FONKSİYONLAR

$f: [-a, a] \rightarrow K \subset \mathbb{R} \quad \forall x \in [-a, a] \quad f(-x) = f(x)$ ise bu fonksiyona çift fonksiyon denir. Çift fonksiyonların grafiklerinde (x, y) ve $(-x, y)$ beraber bulunacağından bu fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetrik.

Örneğin $f(x) = x^2$ fonksiyonu $f(-x) = f(x)$ eşitliğini sağladığından çift fonksiyondur. Şekli inceleyiniz.



Örnek...6 :



grafiği verilen $y = \cos x$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

Örnek...7 :

$f(x)$ çift bir fonksiyon ve
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 5f(x) + 2f(-x) = 3x^2 + 1$
 ise $f(0)$ kaçtır?

$$f \text{ çiftse } f(-x) = f(x) \Rightarrow 5f(x) + 2f(x) = 3x^2 + 1$$

$$7f(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2 + 1}{7} \quad f(0) = \frac{1}{7}$$

(Not $x=0$ için direkt de çözülebilir!)

Örnek...8 :

$f: [a, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m-2)x^3 + (n-3)x^2 + (a+n-5)x + 2$
 fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(a) = ?$

Çiftlik simetrik $a = -3$ ve tek derce yok
 $m-2=0 \quad a+n-5=0 \Rightarrow n=8$

$$f(x) = 5x^2 + 2 \Rightarrow f(-3) = 5(-3)^2 + 2 = 47$$

Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m-2)x^k + (n-3)x^3 + (13-k+n)x + 2$
 fonksiyonu çift fonksiyon ise $k+n$ kaçtır?

f çiftse tek derce olmaz

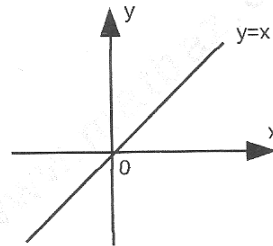
$$n-3=0 \quad 13-k+n=0$$

$$n=3 \Rightarrow k=16 \quad k+n=19$$

TEK FONKSİYONLAR

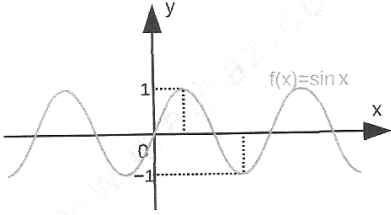
Herhangi bir $f: [-a, a] \rightarrow K \subset \mathbb{R}$ fonksiyonunda $\forall x \in [-a, a], f(-x) = -f(x)$ ise bu fonksiyona tek fonksiyon denir. Tek fonksiyonların grafiklerinde (x, y) ve $(-x, -y)$ beraber bulunacağından bu fonksiyonların grafikleri orjine göre simetrik.

Örneğin $f(x) = x$ fonksiyonu $f(-x) = -f(x)$ eşitliğini sağladığından tek fonksiyondur. Şekli inceleyiniz.



Örnek...10 :

$f(x)=\sin x$ fonksiyonu tek fonksiyondur.



Örnek...11 :

$f(x)$ tek bir fonksiyon ve
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, 4f(x) + 2f(-x) = 3x^3 + 2x + k - 2$
ise $f(k)$ kaçtır?

f tek ise $f(-x) = -f(x)$
 $4f(x) - 2f(x) = 3x^3 + 2x + k - 2$
 $2f(x) = 3x^3 + 2x + k - 2$
 $f(x) = \frac{3x^3}{2} + x + \frac{k-2}{2}$
 $f(2) = \frac{3 \cdot 2^3}{2} + 2 = 14$

Örnek...12 :

$f: [p, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = px^3 + (r+2)x^2 + 2x + s - r$
fonksiyonu tek fonksiyon ise $f(1)$ kaçtır?

Aritmetik simetrik $p = -5$ çift derece yok
 $r+2=0 \quad s-r=0 \Rightarrow r=-2 \quad s=-2$
 $f(x) = -5x^3 + 2x$
 $f(1) = -5 + 2 = -3$

Örnek...13 :

$f: [u, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (k+4)x^3 + (a+k-5)\sin x + x^2 - 1$
fonksiyonu çift fonksiyon ise $f(a) = ?$

Aritmetik simetrik $u = -3$ / tek dereceli terim
 $k+4=0 \quad a+k-5=0$
 $k=-4 \quad a=9$
 $f(x) = x^2 - 1$
 $f(9) = 9^2 - 1 = 80$

YA AYINDI (YANI ÇİFT)

YA - PARANTEZİNDE AYINDI (YANI TEK)

Örnek...14 :

$f(x)=x^4, g(x)=x^3+x, h(x)=x^2+x^3$
 $r(x)=\sin x + \cos x$ fonksiyonlarının teklik veya çiftlik açısından inceleyiniz?

$f(x)=x^4 \quad f(-x)=(-x)^4 = x^4 = f(x)$ f çift
 $g(x)=x^3+x \quad g(-x)=(-x)^3+(-x) = -x^3-x = -(x^3+x) = -g(x)$ f tek
 $h(x)=x^2+x^3 \quad h(-x)=(-x)^2+(-x)^3 = x^2-x^3$ ne tek ne çift
 $r(x)=\sin x + \cos x \quad r(-x)=\sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$ ne tek ne çift

Örnek...15 :

f fonksiyonu grafiği y eksenine göre simetrik olan bir fonksiyon ve
 $f(x) - 4f(-x) = 3x^2 + (m+3)x + 5$ ise $f(2)$ kaçtır?

f çift ise $f(-x) = f(x)$
 $f(x) - 4f(x) = 3x^2 + (m+3)x + 5$
 $-3f(x) = 3x^2 + (m+3)x + 5$
 $f(x) = -x^2 - \frac{(m+3)}{3}x - \frac{5}{3}$
 $f(2) = -4 - \frac{5}{3} = -\frac{17}{3}$

Örnek...16 :

Reel sayılarda f fonksiyonu tek g fonksiyonu çift fonksiyonlarsa aşağıdaki fonksiyonları teklik çiftlik bakımından inceleyiniz.

a) $f+g$ b) $f \cdot g$ c) $f \circ g(x)$ d) $f(x \cdot g(x))$ e) $f \circ f$

f ve g sıfır fonksiyonu olmasın! (Neden ki?)

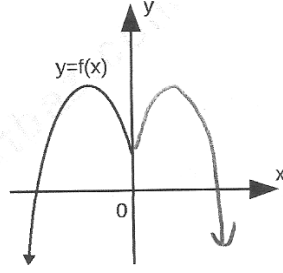
a) $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) \rightarrow$ Ne tek Ne çift
b) $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -f \cdot g(x) \rightarrow$ Tek
c) $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -f \circ g(x) \rightarrow$ Çift
d) $f(x \cdot g(-x)) = f(x \cdot (-g(x))) = f(-x \cdot g(x)) = -f(x \cdot g(x)) \rightarrow$ Tek
e) $f \circ f(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -f \circ f(x) \rightarrow$ Tek!

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 8

(ARTAN, AZALAN, TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR)

Örnek...17 :

Grafiğinin bir parçası verilen reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ çift fonksiyonunun grafiğinin tamamı nasıldır?



Çift fonksiyonun y ekseninde simetrik parça çabası

Örnek...18 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^7 - 34x^5 + 6x^3 + mx - 2$ ve $f(9) = 5$ ise $f(-9) = ?$

$$f(9) = 4 \cdot 9^7 - 34 \cdot 9^5 + 6 \cdot 9^3 + 9m - 2 = 5$$

$$+ f(-9) = 4 \cdot 9^7 - 34 \cdot 9^5 + 6 \cdot 9^3 - 9m - 2 = A \text{ (olun)}$$

$$-2-2 = 5+A \Rightarrow A = -9$$

Not tek dereceli terimler $x=-9$ ve $x=9$ için toplanırsa ortada birşey kalır.

Örnek...19 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^{14} - mx^2 - 8x + 4$ ve $f(4) = 3$ ise $f(-4) = ?$

$$f(4) = 4 \cdot 4^{14} - m \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 + 4 = 3$$

$$- f(-4) = 4 \cdot (-4)^{14} - m \cdot (-4)^2 - 8 \cdot (-4) + 4 = A \text{ (olun)}$$

$$-32+4 -32-4 = 3-A \Rightarrow A = 67$$

Çift dereceli terimler her iki tarafa çıkarmada yok olur!

Örnek...20 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^{20} - 25x^{18} - 8^4 + k$ ve $f(29) = 3$ ise $f(-29) = ?$

$$f(x) \text{ çift } f(-29) = f(29) = 3$$

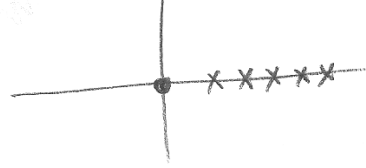
(Not 18 ve 19. Örnekler tek / çift değil!)

Örnek...21 :

Reel sayılarda tanımlı ve tek olduğu bilinen $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği Ox eksenini pozitif tarafta 5 noktada kesiyor ise $y=0$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

$$f(x) = -f(-x) \text{ (tek fonksiyon)}$$

$$x=0 \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$



Her bir pozitif bölgede bir noktada ve negatif bölgede de bir noktada bulunacağından

$$y=f(x)=0 \text{ denkleminin } 5+5+1=11 \text{ çözümü vardır.}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 8

(ARTAN, AZALAN, TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR)

DEĞERLENDİRME

- 1) g çift bir fonksiyon ve $f^{-1} \circ g(-x) = 4g(x) + 3$ ise $f(x) = ?$

$$g(-x) = g(x)$$

$$f^{-1}(g(-x)) = f^{-1}(g(x)) = 4g(x) + 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 4x + 3$$

$$f(x) = \frac{x-3}{4}$$

- 2) $f: [e, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m-2)x^{13} + (n-3)x^{21} + x^2 - 4$ fonksiyonu y eksenine göre simetrik ise $f(n+e) = ?$

grafikten f çifttir. $e = -4$ (çünkü simetrik)

$$m-2=0 \quad n-3=0 \quad n=3 \quad n+e=-1$$

$$\text{ve } f(x) = x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$f(-1) = 1 - 4 = -3$$

- 3) $f: [-6, 6] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (a-2)x^4 + (n-3)x^3 + (n+2)x^2 + p - 3$$

fonksiyonu orijine göre simetrik ise $f(p+n) = ?$

f grafikten dolayı tektir.

çift dereceli bulunmaz

$$a-2=0 \quad n+2=0 \quad p-3=0$$

$$a=2 \quad n=-2 \quad p=3 \quad p+n=1$$

$$f(x) = -5x^3$$

$$f(1) = -5$$

- 4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 7x^{14} - 5x^{10} - cx^4 + 8x + 4$ ve $f(-3) = 3$ ise $f(3) = ?$

$$f(-3) = 7 \cdot (-3)^{14} - 5 \cdot (-3)^{10} - c \cdot (-3)^4 - 24 + 4 = 3$$

$$- f(3) = 7 \cdot (3)^{14} - 5 \cdot (3)^{10} - c \cdot (3)^4 + 24 + 4 = A$$

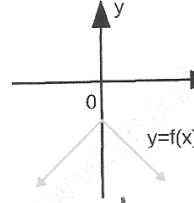
$$-4 + 4 - 24 - 4 = 3 - A$$

$$-48 = 3 - A$$

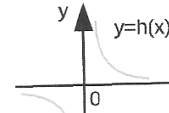
$$A = 51$$

(Taraftan tarafa çıkarmayla çözümleri gelir!)

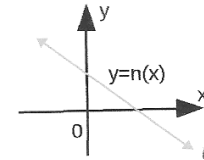
- 5) Grafiklere göre fonksiyonların tek veya çift oluşuna karar veriniz.



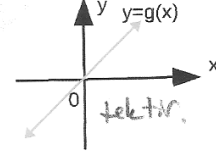
çift olabilir



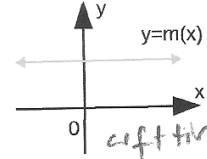
tek olabilir



ne tek ne çift

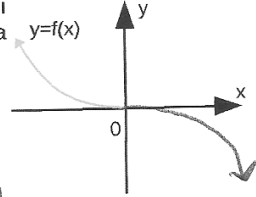


tektir.



çifttir

- 6) Grafiğinin bir parçası verilen reel sayılarda tanımlı $y=f(x)$ tek fonksiyonunun grafiğinin tamamı nasıldır?



orijine göre simetrik olduğudur.

- 7) f fonksiyonu çift, g fonksiyonu tek fonksiyonlarsa $h(x) = f \circ g(\sin x)$ fonksiyonu tek midir?

$$f \circ g(\sin(-x)) = f(g(-\sin x)) = f(-g(\sin x))$$

$$= f(g(\sin x)) = f \circ g(\sin x)$$

$f \circ g(\sin(-x))$ çift fonksiyondur!