

FONKSİYONLAR BÖLÜM 7

BİLEŞKE FONKSİYON

BİLEŞKE İŞLEMİ

$f:A \rightarrow B$ ve $g:B \rightarrow C$ fonksiyonları verilmiş olsun 'o' bileşke sembolü ile verilmiş ve $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ biçiminde tanımlanmış fonksiyona g ile f nin bileşkesi denir.

Örnek...1 :

$f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve $g:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x+3$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x+3) \\ &= (2x+3)^2 \\ &= 4x^2 + 12x + 9 \\ \text{b) } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) \\ &= 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Örnek...2 :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlı $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ permütasyon fonksiyonu için $(g \circ f)(x)$ nedir?

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

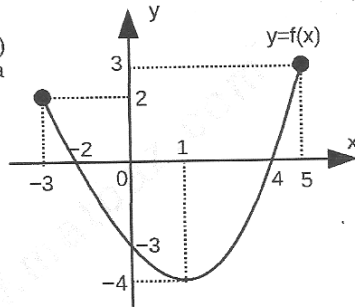
Önce f ye bakalım
çıkan değere g de bakalım

Örnek...3 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonuna göre,

$$(f \circ f)(0) = ?$$

$$\begin{aligned} &= f(f(0)) \\ &= f(-3) \\ &= 2 \end{aligned}$$



UYARI

1) $f \circ f^{-1} = I(x) = x$ (Birim fonksiyon)

2) Verilmiş bir bileşke fonksiyonda eğer fonksiyonlardan biri isteniyorsa istenmeyen fonksiyonun tersi ile kendisi birleştirilerek sonuca gidilir. Örneğin; $f \circ g$ ve f verilmişse $f^{-1} \circ (f \circ g)$ ile g fonksiyonu elde edilebilir.

Örnek...4 :

$f \circ g(x) = 4x-3$ ve $g(x) = 2x+7$ ise $f(x) = ?$

$$\begin{aligned} f \circ g \circ g^{-1} &= f \\ \downarrow & \\ (4x-3) \circ \left(\frac{x-7}{2}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{x-7}{2}\right) - 3 \\ &= 2x - 17 \end{aligned}$$

Örnek...5 :

$f(6x+2) = 2x-3$ ise $f(x) = ?$

İfadeyi $6x+2$ 'in tersiyle birleştirelim

$$(6x+2)^{-1} = \frac{x-2}{6}$$

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{x-2}{6}\right) - 3 = \frac{x-11}{3}$$

UYARI

$(f \circ g)^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ olarak tanımlanır.

Örnek...6 :

$f \circ g(3x+2) = \frac{2x-3}{1+x}$ ve $g(x) = 2x+3$ ie $f^{-1}(x)$ nedir?

$$g(3x+2) = 2(3x+2)+3 = 6x+7$$

$$f(6x+7) = \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{2\left(\frac{x-7}{6}\right)-3}{\frac{x-7}{6}+1}$$

$$f(x) = \frac{2x-32}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-32}{x-2}$$

Örnek...7 :

$f: [-4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 8x + 16$ ve $g \circ f(x) = 2x - 7$ ise $g(x)$ fonksiyonunun kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+4)^2 \\ y &= (x+4)^2 \\ \sqrt{y} &= |x+4| \\ \sqrt{y} - 4 &= x \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x} - 4 \end{aligned}$$

$$g \circ f = f^{-1} = g$$

$$(2x-7) \circ (\sqrt{x}-4) = g(x)$$

$$g(x) = 2(\sqrt{x}-4) - 7$$

$$= 2\sqrt{x} - 15$$

Örnek...8 :

Uygun şartlarda $g \circ f(x) = 3x + 4$, $h \circ f(x) = 2x + 3$ ise $h \circ g^{-1}(2) = ?$

$$h \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = h \circ g^{-1} \quad f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(2x+3) \circ \left(\frac{x-4}{3}\right) = h \circ g^{-1}$$

$$h \circ g^{-1}(x) = 2\left(\frac{x-4}{3}\right) + 3$$

$$h \circ g^{-1}(2) = 2 \cdot \frac{-2}{3} + 3 = \frac{5}{3}$$

Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ ve $f \circ g(x) = 6x + 7$ olarak veriliyor. Buna göre $g(x)$ fonksiyonunu bulunuz?

$$f \circ f^{-1} = g$$

$$\downarrow$$

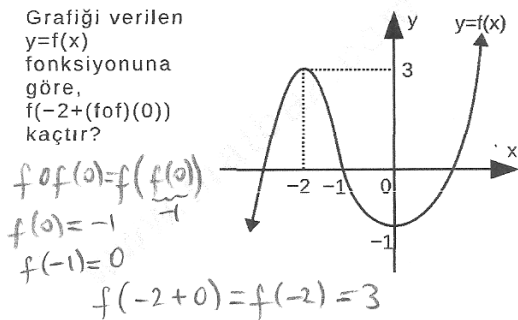
$$\left(\frac{x+3}{2}\right) \circ (6x+7) = g$$

$$x \text{ yerini}$$

$$g(x) = \frac{6x+7+3}{2} = \frac{3x+5}{1}$$

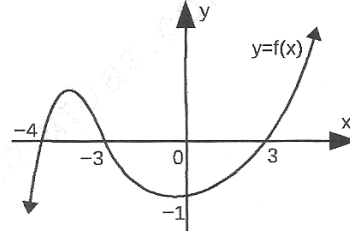
Örnek...10 :

Grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonuna göre, $f(-2 + (f \circ f)(0))$ kaçtır?



Örnek...11 :

Grafiğe göre $f(x+1)=0$ denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?



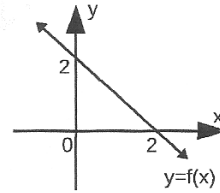
$$f(x+1)=0 \rightarrow x+1 = -3 \vee -4 \vee -5$$

$$x = -4 \vee -5 \vee -6$$

$$\Sigma x = -4 + (-5) + (-6) = -15$$

Örnek...12 :

Grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ için $(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)(2)$ 100 tane değeri kaçtır?



$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$$

$$x + y = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - x$$

$$f_1(2) = 0 \quad f_2(0) = 2 \quad f_3(2) = 0$$

$$f_4(0) = 2 \quad \dots \quad f_{100}(2) = 2$$

Çiftlerde sonuç 2

Örnek...13 :

$f(x) = 2x^2 - 3x$, $g(x) = x - x^2$ ve $h(x) = 3x - 4$ olduğuna göre, $(h \circ g \circ f)(2) = ?$

$$h \circ g \circ f(2) = h(g(f(2)))$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$$

$$g(2) = 2 - 2^2 = -2$$

$$h(-2) = 3 \cdot (-2) - 4 = -6 - 4 = -10$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 7

(BİLEŞKE FONKSİYON)

Örnek...14 :

f doğrusal bir fonksiyon ve $f \circ f(x) = 4x - 3$ ise $f(x)$ kaç olabilir?

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + n \\ f \circ f(x) &= f(f(x)) = f(mx + n) \\ m(mx + n) + n &= 4x - 3 \\ m^2x + mn + n &= 4x - 3 \\ m^2 &= 4 \quad mn + n = -3 \\ m = 2 &\Rightarrow 3n = -3 \quad n = -1 \\ f_1(x) &= 2x - 1 \text{ Uy} \\ m = -2 &\Rightarrow -n = -3 \Rightarrow n = 3 \\ f_2(x) &= -2x + 3 \text{ Uy} \end{aligned}$$

Örnek...15 :

$f(x) = 3x + 4$ fonksiyonu için $f^{-1}(3x)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti nedir?

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \frac{x-4}{3} \quad f^{-1}(3x) = \frac{3x-4}{3} \\ f(x) &= 3x + 4 \Rightarrow x = \frac{f(x)-4}{3} \quad x \text{ fonksiyonu} \\ f^{-1}(3x) &= \frac{3 \cdot \left(\frac{f(x)-4}{3}\right) - 4}{3} = \frac{f(x)-8}{3} \end{aligned}$$

Örnek...16 :

$(f \circ f)^{-1}(x) = 2x + 3$ ise $f^{-1}(x)$ ne olabilir?

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f^{-1}(x) &= 2x + 3 \\ f^{-1}(f^{-1}(x)) &= 2x + 3 \\ f^{-1}(x) &= mx + n \Rightarrow \\ m(mx + n) + n &= 2x + 3 \\ m^2x + mn + n &= 2x + 3 \\ m^2 &= 2 \quad mn + n = 3 \\ m = \sqrt{2} &\Rightarrow n(\sqrt{2} + 1) = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{\sqrt{2} + 1} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{2}x + 3(\sqrt{2} - 1) \text{ Uy} \end{aligned}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 7

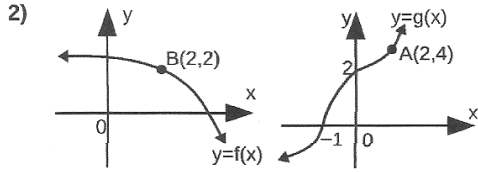
(BİLEŞKE FONKSİYON)

DEĞERLENDİRME

- 1) $f \circ g(x) = 2x+7$ ve $f(x) = 3x-4$ ise $g(x) = ?$

$$f^{-1} \circ f \circ g = g \quad f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$$

$$\left(\frac{x+4}{3}\right) \circ (2x+7) \quad \frac{2x+7+4}{3} = \frac{2x+11}{3} = g(x)$$



Grafikleri verilen f ve g fonksiyonları için $(f \circ g)(x) < 2$ eşitliğinin çözüm kümesini bulunuz?

$$f(g(x)) < 2 \quad \begin{cases} f(x) < 2 & x > 2 \text{ için geçerli.} \\ g(x) > 2 & x > 0 \text{ için geçerli.} \end{cases}$$

3) $g(x) = 3x+2$
 $g(2x+1) = 3(2x+1)+2 = 6x+5 \rightarrow x$

$$f(x) = \frac{x-2}{3x-7}$$

3) $f(x) \cdot x - 7f(x) = x-2$

- 3) $f: A \rightarrow B$, $f(x) = \frac{x-2}{3x-7}$ ve $g(x) = 3x+2$ ise $g(2x+1)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti nedir?

$$3f(x) \cdot x - x = 7f(x) + 2$$

$$x[3f(x)-1] = 7f(x)+2 \rightarrow x = \frac{7f(x)+2}{3f(x)-1}$$

$$g(2x+1) = 6x+5 = 6 \cdot \left(\frac{7f(x)+2}{3f(x)-1}\right) + 5$$

$$= \frac{51f(x)+9}{3f(x)-1}$$

- 4) Uygun koşullardaki $f_i(x)$ fonksiyonları için

$$f_1(x) = \frac{1}{2-x}, \quad f_2(x) = f_1 \circ f_1$$

$$f_3(x) = f_1 \circ f_2, \quad f_4(x) = f_1 \circ f_3, \dots$$

olarak veriliyor. Buna göre, $f_{101}(3) = ?$

$$f_2(x) = f_1 \circ f_1(x) = \frac{2-x}{3-2x}$$

$$f_3(x) = f_1 \circ f_2(x) = \frac{3-2x}{4-3x}$$

$$f_4(x) = \frac{4-3x}{5-4x}$$

$$f_{101}(x) = \frac{101-100x}{102-101x} \Rightarrow f_{101}(3) = ?$$

$$\frac{101-300}{102-303} = \frac{-199}{-201} = \frac{199}{201}$$

- 5) $f^{-1}(x+1) = 2x-3$ ise $(f \circ f)(0) = ?$

$$f(2x-3) = x+1 \quad 2x-3=0 \Rightarrow x=3/2$$

$$f(0) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ için } 2x-3 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x = \frac{11}{2} \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

$$f\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4} + 1 = \frac{15}{4}$$

$$f \circ f(0) = f(f(0)) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

- 6) $f(x+2) = g(2x-6)$ ise $g((g^{-1} \circ f \circ g)^{-1}(4))$ kaçtır?

$$g(g^{-1} \circ f^{-1} \circ g)(4) = f^{-1} \circ g(4)$$

$$g(4) \text{ için } 2x-6=4 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$$

$$x=5 \Rightarrow f(7) = g(4)$$

$$\Rightarrow f^{-1} \circ g(4) = f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(f(7)) = 7$$

$$\text{Not } g \circ g^{-1} = f^{-1} \circ f = I(x) = x$$