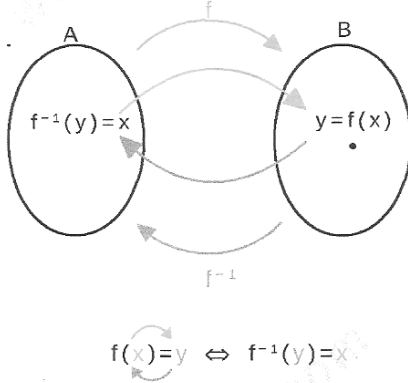


## FONKSİYONLAR BÖLÜM 6

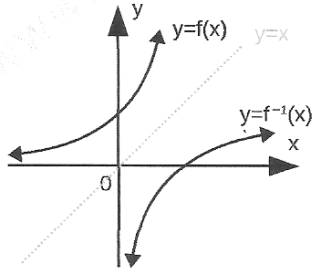
### TERS FONKSİYON:

$f$ , A kümesinden B kümesine tanımlanmış bir fonksiyon olsun. B den A ya tanımlı  $f^{-1}$  bağıntısının da bir fonksiyon olması için  $f$  fonksiyonu **bire-bir ve örten** olmalıdır. Eğer  $f$  bu özelliklere sahipse  $f^{-1}$  e  $f$  in ters fonksiyonu denir. Şekli inceleyiniz.



### UYARI

$y=f(x)$  ve  $y=f^{-1}(x)$  fonksiyonlarının grafikleri  $y=x$  (1. Açıortaya) göre simetriktr.



### Örnek...1 :

$A=\{a,b,c\}$   $f:A \rightarrow A$ ,  $f=\{(a,b),(b,b),(c,c)\}$  fonksiyonu için  $f^{-1}$  bağıntısını yazınız.  $f^{-1}$  bir fonksiyon mudur?

$f^{-1} = \{(b,a), (b,b), (c,c)\}$  fonksiyon değil  
2 elemanına veya b iki görüntüye sahip

### Örnek...2 :

Reel sayılardan reel sayılara tanımlı  $f(x)=3x+1$  fonksiyonu için  $f^{-1}(8)$  değerini hesaplayınız?

$$f(x)=3x+1 \quad f^{-1}(3x+1)=x$$

$$3x+1=8 \Rightarrow 3x=7 \Rightarrow x=7/3$$

$$f^{-1}(8)=7/3$$

### Örnek...3 :

Uygun koşullarda  $f(x)=2x+3$  ise  $f^{-1}(7)$  değerini hesaplayınız.

$$f(x)=2x+3 \Rightarrow f^{-1}(2x+3)=x$$

$$2x+3=7 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(7)=2$$

### Örnek...4 :

$f(x)=x^3+x$  ise  $f^{-1}(30)$  değerini hesaplayınız.

$$f(x)=x^3+x \Rightarrow f^{-1}(x^3+x)=x$$

$$x^3+x=30 \Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(30)=3$$

### Örnek...5 :

$A=\{a,b,c\}$  kümesinde tanımlı  $f=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$  permütasyon fonksiyonu için  $f^{-1}(x)$  nedir?

$$f^{-1}(x)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

aynıdır yukarıya baktık

UYARI

Verilen bir  $f$  fonksiyonunun kuralını bulmak için aşağıdaki iki adım izlenir:

Adım 1) Verilen fonksiyonda  $x$  in  $y$  cinsinde değeri bulunur.

Adım 2)  $x$  ve  $y$  yer değiştirilir.

Örnek...6 :

$y=f(x)=3x+5$  fonksiyonunun ters fonksiyonunun kuralını bulunuz.

$$y=3x+5 \Rightarrow y-5=3x \Rightarrow \frac{y-5}{3}=x$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{3}$$

Örnek...7 :

$y=f(x)=ax+b$  fonksiyonunun ters fonksiyonunun kuralını bulunuz.

$$y=ax+b \Rightarrow \frac{y-b}{a}=x$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$$

Örnek...8 :

$y=f(x)$  fonksiyonu için  $x=\frac{3y-2}{y-4}$  eşitliği varsa  $f^{-1}(x)$  i bulunuz.

$x$  yalnız bırakılır.)

$$x=\frac{3y-2}{y-4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x-2}{x-4}$$

Örnek...9 :

$f: \mathbb{R}-\{-3\} \rightarrow \mathbb{R}-\{2\}$ ,  $f(x)=\frac{2x-1}{x+3}$ , fonksiyonun ters fonksiyonunun kuralını bulunuz.

$$y=\frac{2x-1}{x+3} \Rightarrow xy+3y=2x-1$$

$$xy-2x=-3y-1$$

$$x(y-2)=-3y-1$$

$$x=\frac{-3y-1}{y-2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-2}$$

UYARI

$f: \mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ ,  $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ , fonksiyonunun tersinin kuralı  $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$  dir.

Örnek...10 :

$f: \mathbb{R}-\{a\} \rightarrow \mathbb{R}-\{b\}$ ,  $f(x)=\frac{2x-3}{3x-5}$ , fonksiyonu bire bir ve örtense  $a, b$  değerini bulunuz?

$$x=a \text{ için ifade tanımsız } 3a-5=0 \Rightarrow a=5/3$$

$$\text{ters fonksiyon } \frac{5x-3}{3x-2} \quad x=b \text{ için tanımsız}$$

$$3b-2=0 \Rightarrow b=2/3$$

$$a, b = \frac{2}{3}, \frac{5}{3} = \frac{10}{9} \text{ m}$$

TANIM KÜMELERİNDEN PAYDALARIN KÖKLERİ ÇIKARILIR!

Örnek...11 :

$f: \mathbb{R}-\{1\} \rightarrow \mathbb{R}-\{2\}$ ,  $f(x)=\frac{ax+4}{cx+5}$ , fonksiyonu bire bir ve örtense  $a, c$  değerini bulunuz?

$$x=1 \Rightarrow c \cdot 1 + 5 = 0 \quad c = -5$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x+4}{cx-2}$$

$$x=2 \Rightarrow 2c-2=0 \text{ ve } c=-5 \Rightarrow 2=-10$$

$$2 \cdot c = 50$$

Örnek...12 :

$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   $y=f(x)=x^2$  fonksiyonun ters fonksiyonunun kuralını bulunuz.

$$y=x^2 \Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x^2}$$

$$\sqrt{y}=|x|$$

$$\sqrt{y}=x$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$$

Örnek...13 :

$f: [-2, \infty) \rightarrow [-4, \infty)$ ,  $y=f(x)=x^2+4x$   
fonksiyonun ters fonksiyonun kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} y &= x^2+4x = (x+2)^2-4 \\ y-4 &= (x+2)^2 \\ \sqrt{y-4} &= |x+2| \\ \sqrt{y-4} &= x+2 \Rightarrow x = \sqrt{y-4}-2 \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x-4}-2 \end{aligned}$$

Örnek...14 :

Reel sayılarda  $f(x)=\sqrt[3]{7x+2}-4$   
fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{7x+2}-4 \\ y+4 &= \sqrt[3]{7x+2} \\ (y+4)^3 &= 7x+2 \\ x &= \frac{(y+4)^3-2}{7} \\ f^{-1}(x) &= \frac{(x+4)^3-2}{7} \end{aligned}$$

Örnek...15 :

$f: (\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{R}$   $f(x)=\log_3(2x-1)$   
fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} y &= \log_3(2x-1) \\ 3^y &= 2x-1 \\ x &= \frac{3^y+1}{2} \\ f^{-1}(x) &= \frac{3^x+1}{2} \end{aligned}$$

Örnek...16 :

Uygun şartlar altında  $f(x)=3.4^x-1$   
fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} y &= 3.4^x-1 \Rightarrow y+1 = 3.4^x \\ 4^x &= \frac{y+1}{3} \quad x = \log_4 \left( \frac{y+1}{3} \right) \\ f^{-1}(x) &= \log_4 \left( \frac{x+1}{3} \right) \end{aligned}$$

Örnek...17 :

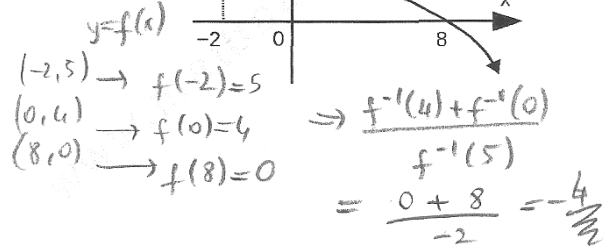
Uygun şartlar altında  $f(x)=e^{x+3}+5$   
fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$\begin{aligned} y &= e^{x+3}+5 \Rightarrow y-5 = e^{x+3} \\ x+3 &= \ln(y-5) \\ x &= \ln(y-5)-3 \\ f^{-1}(x) &= \ln(x-5)-3 \end{aligned}$$

Örnek...18 :

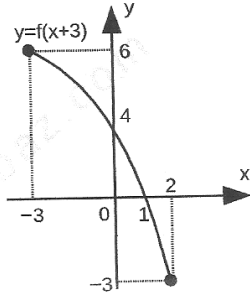
Grafiği verilen  
 $y=f(x)$  fonksiyonunu için

$$\frac{f^{-1}(4)+f^{-1}(0)}{f^{-1}(5)} = ?$$



Örnek...19 :

$y=f(x+3)$  ün grafiğine göre,  $\frac{f(0)}{f^{-1}(-3)}$  değeri kaçtır?  
 $f^{-1}(-3)$  OLSUN



$$(-3, 6) \Rightarrow f(0) = 6$$

$$(0, 4) \Rightarrow f(3) = 4$$

$$(2, -3) \Rightarrow f(5) = -3$$

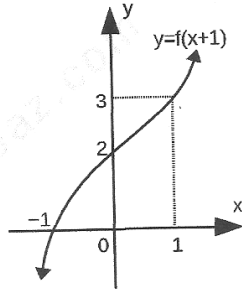
$$f^{-1}(-3) = 5$$

$$\frac{f(0)}{f^{-1}(-3)} = \frac{6}{5}$$

( soruyu düzelttin )

Örnek...20 :

Grafiği verilen  $y=f(x+1)$  fonksiyonu için  $\frac{f^{-1}(2)}{f^{-1}(3)} = ?$



$$y = f(x+1)$$

$$(-1, -1) \Rightarrow f(0) = -1$$

$$(0, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \rightarrow f^{-1}(2) = 1$$

$$(1, 3) \Rightarrow f(2) = 3 \rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$\frac{f^{-1}(2)}{f^{-1}(3)} = \frac{1}{2}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 6

( TERS FONKSİYONLAR )

DEĞERLENDİRME

- 1)  $A=\{1,2,3\}$  kümesinde tanımlı  $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  permütasyon fonksiyonu için  $f^{-1}$  fonksiyonunu yazınız.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2)  $f: \mathbb{R} - \{c\} \rightarrow \mathbb{R} - \{-4\}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{2-kx}}{3x+5}$  fonksiyonu bire bir ve örtense k.c değerini bulunuz?

$x=c$  payda 0'lar  $3c+5=0 \Rightarrow c=-5/3$   
 $x=-4$  tersin payda 0'lar

$$f^{-1}(x) = \frac{-5x+\sqrt{2}}{3x+k} \rightarrow 3(-4)+k=0 \Rightarrow k=12$$

$$k \cdot c = \frac{-5}{3} \cdot 12 = -20$$

- 3)  $f: (-\infty, \frac{1}{2})$ ,  $f(x) = x^2 - 10x - 6$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$f(x) = x^2 - 10x - 6 = (x-5)^2 - 31$$

$$y = (x-5)^2 - 31 \Rightarrow \sqrt{y+31} = |x-5|$$

$$\sqrt{y+31} = -x+5 \Rightarrow x = \sqrt{y+31} - 5$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+31} - 5$$

- 4)  $f(x) = x^3 + 3$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$y = x^3 + 3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-3} = \sqrt[3]{x^3}$$

$$\sqrt[3]{y-3} = x$$

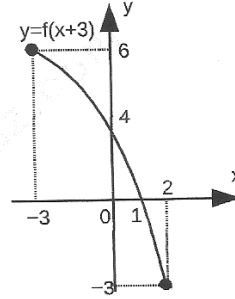
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-3}$$

- 5)  $y=f(x+3)$  ün grafiğine göre,

$$\frac{f^{-1}(4)}{f^{-1}(-3)} + m \cdot f^{-1}(0) = 0$$

ise m değeri kaçtır?

$$y = f(x+3)$$



$$(-3, 6) \Rightarrow f(0) = 6$$

$$(0, 4) \Rightarrow f(3) = 4$$

$$(1, 0) \Rightarrow f(4) = 0$$

$$(2, -3) \Rightarrow f(5) = -3$$

$$f^{-1}(-3) = 5$$

$$f^{-1}(4) = 3$$

$$\frac{3}{5} + m \cdot 4 = 0$$

$$4m = -3/5$$

$$m = -3/20$$

- 6)  $f$  doğrusal bir fonksiyon ve  $f(2)=3$ ,  $f^{-1}(2)=5$  ise  $f(0)=?$

$$f(x) = mx + n$$

$$-1 \cdot 2m + n = 3$$

$$+ 5m + n = 2$$

$$3m = -1$$

$$m = -1/3$$

$$n = 11/3$$

$$f(x) = \frac{-x}{3} + \frac{11}{3}$$

$$f(0) = 11/3$$

$2, 4, 0, 1$

$A(2,3) B(5,2) C(0,y)$

doğrusal  $m_{AB} = m_{BC}$

$$\frac{2-3}{5-2} = \frac{y-2}{0-5}$$

$$\frac{-1}{3} = \frac{y-2}{-5}$$

$$5 = 3y - 6 \Rightarrow y = 11/3$$

- 7)  $2x \cdot f(x) - 3 = f(x) - x$  eşitliğiyle uygun şartlarda verilen  $y=f(x)$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$2x \cdot f(x) - f(x) = -x + 3$$

$$f(x) [2x-1] = -x+3$$

$$f(x) = \frac{-x+3}{2x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2x+1}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 6

( TERS FONKSİYONLAR )

- 8)  $y=f(x)$  fonksiyonu için  $x \cdot y - 4 = \frac{1+3y}{5}$  eşitliği varsa  $f^{-1}(x)=?$

$$\begin{aligned} 5xy - 20 &= 1 + 3y \\ 5xy &= 3y + 21 \\ x &= \frac{3y+21}{5y} \rightarrow x' \text{ yalnız} \end{aligned}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+21}{5x}$$

- 9)  $f: (-\frac{3}{5}, \infty) \rightarrow K \subset \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7 - \log_2(3+5x)$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$y = 7 - \log_2(3+5x)$$

$$\log_2(5x+3) = 7-y$$

$$5x+3 = 2^{7-y}$$

$$x = \frac{2^{7-y} - 3}{5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^{7-x} - 3}{5}$$

- 10) Uygun koşullarda tanımlı  $f(x) = 3 + \ln(e^x - 2)$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$y = 3 + \ln(e^x - 2)$$

$$\ln(e^x - 2) = y - 3$$

$$e^x - 2 = e^{y-3}$$

$$e^x = e^{y-3} + 2$$

$$x = \ln(e^{y-3} + 2)$$

$$f^{-1}(x) = \ln(e^{x-3} + 2)$$

- 11) Uygun koşullarda tanımlı  $f(x) = 7^{3x+2} - 5$  fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz?

$$y = 7^{3x+2} - 5$$

$$y+5 = 7^{3x+2}$$

$$3x+2 = \log_7(y+5)$$

$$x = \frac{\log_7(y+5) - 2}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_7(x+5) - 2}{3}$$