

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 2

(FONKSİYON TEMEL KAVRAMLAR - DEĞER HESAPLAMA - DÖNGÜ TİPİ)

FONKSİYONLAR BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR, DEĞER HESAPLAMA, DÖNGÜ TİPİ

$y=f(x)$ verilir $f(10)$ gibi bir sayısal değer istenirse $x=10$ yazılarak işlem yapılır.
 $y=f(x+3)$ verilir $f(10)$ gibi bir sayısal değer istenirse $x=7$ yazılarak işlem yapılır.
 Bu işlemlerde ana fikir parantez içinde istenen sayısal değeri verecek x in yazılmasıdır.

Örnek...1 :

Reel sayılarda tanımlı $y=f(x)=x^2$ ve $y=g(x)=x^2-4$ fonksiyonları için, $f(2)+g(1)$ kaçtır?

$$x=2 \text{ için } f(2)=2^2 \quad x=1 \text{ için } g(1)=1^2-4$$

$$f(2)=8$$

$$g(1)=-3$$

$$f(2)+g(1)=8+(-3)=5 //$$

Örnek...2 :

Reel sayılarda tanımlı $f(2x-3)=x^2-x+2$ fonksiyonu için $f(7)$ değeri kaçtır?

$$2x-3=7 \text{ yapmak için } x=5 \text{ için } f(2,5-3)=5^2-5+2$$

$$2x-3=7 \text{ dersek}$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$f(7)=22 //$$

Örnek...3 :

Uygun şartlarda tanımlı $f\left(\frac{x-3}{x+4}\right)=\frac{2x+a}{x+5}$ fonksiyonu için $f(2)=3$ ise a kaçtır?

$$\frac{x-3}{x+4}=2 \text{ yapar } x' \text{ r bulalım}$$

Önce

$$2x+8=x-3$$

$$x=-11$$

$$x=-11 \text{ dersek}$$

$$f\left(\frac{-11-3}{-11+4}\right)=\frac{2(-11)+a}{-11+5}$$

$$f(2)=\frac{-22+a}{-6}$$

$$3=\frac{-22+a}{-6}$$

$$a-22=18$$

$$a=40 //$$

Örnek...4 :

Uygun şartlarda tanımlı $f(2x+1)-f(2x-1)=x$ ve $f(1)=9$ ise $f(7)$ kaçtır?

$$f(2x+1)-f(2x-1)=x$$

$$x=1 \text{ için}$$

$$f(3)-f(1)=1$$

$$x=2 \text{ için}$$

$$f(5)-f(3)=2$$

$$x=3 \text{ için}$$

$$f(7)-f(5)=3$$

$$f(7)-f(1)=1+2+3$$

$$f(7)-9=6$$

$$f(7)=15 //$$

$$x=6 \text{ için } f(6)-f(7)=\frac{3}{2}$$

$$x=7 \text{ için } f(7)-f(8)=\frac{3}{2}$$

$$x=8 \text{ için } f(8)-f(9)=\frac{3}{2}$$

$$x=23 \text{ için } f(23)-f(24)=\frac{3}{2}$$

$$f(6)-f(24)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\dots+\frac{3}{2}$$

Örnek...5 :

$f(x)-f(x+1)=\frac{3}{2}$ ve $f(6)=-12$ ise $f(24)$ kaçtır?

$$-12-f(24)=18 \cdot \frac{3}{2}$$

$$-12-f(24)=27$$

$$-39=f(24) //$$

Örnek...6 :

$f(2x-1)=x+2$ ve $f(-1)=6$ ise $f(33)$ kaçtır?

$$x=0 \text{ için } \frac{f(-1)}{f(1)}=\frac{2}{1}$$

$$x=1 \text{ için } \frac{f(1)}{f(3)}=\frac{3}{2}$$

$$x=2 \text{ için } \frac{f(3)}{f(5)}=\frac{4}{3}$$

$$x=32 \text{ için } \frac{f(31)}{f(33)}=\frac{34}{33}$$

$$\frac{f(-1)}{f(1)} \cdot \frac{f(1)}{f(3)} \cdot \frac{f(3)}{f(5)} \cdot \frac{f(5)}{f(33)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 34}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33}$$

$$\frac{f(-1)}{f(33)} = \frac{34}{1}$$

$$\frac{6}{f(33)} = \frac{34}{1}$$

$$34 \cdot f(33) = 6$$

$$f(33) = \frac{6}{34} //$$

Örnek...7 :

Uygun şartlarda tanımlı $f(x)=\frac{5x+4}{2+x}$

fonksiyonunda koordinatları tamsayı olan en çok kaç nokta vardır? x yerine tamsayı verip, görüntüsü de tamsayı olan noktalar soruluyor.

$$f(x)=\frac{5(x+2)-6}{x+2}=\frac{5(x+2)}{x+2}-\frac{6}{x+2}=5-\frac{6}{x+2}$$

6'nın tam bölenleri kadar tamsayı bulunur.

$$-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6$$

Toplam 8 noktanın koordinatları tamsayıdır.

Örnek...8 :

Uygun şartlarda tanımlı $f(x)=\frac{x^2+12x+35}{x^2-x-12}$

fonksiyonu tanım kümesinin kaç farklı tamsayı değeri için negatif görüntüye sahiptir?

$$x^2+12x+35=0$$

$$x^2-x-12=0$$

$$(x+7)(x+5)=0$$

$$(x+3)(x-4)=0$$

$$x_1=-7 \quad x_2=-5$$

$$x_3=-3 \quad x_4=4$$

x	∞	-7	-5	-3	4	∞
$x^2+12x+35$	+	+	+	+	+	+
x^2-x-12	+	+	+	+	+	+
$\frac{x^2+12x+35}{x^2-x-12}$	+	-	+	-	+	+

negatif olan aralık $(-7, -5) \cup (-3, 4)$

sağlayan tamsayılar $= \{-6, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 7 tane //

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 2

(FONKSİYON TEMEL KAVRAMLAR - DEĞER HESAPLAMA - DÖNGÜ TİPİ)

Örnek...9 :

$f(x)=x^2+5x$ fonksiyonu için $f(x+1)=0$ denklemini sağlayan x değerleri nelerdir?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5x \text{ ise} \\ x \text{ yerine } x+1 \text{ koyarsak} \\ f(x+1) &= (x+1)^2 + 5(x+1) = 0 \\ f(x+1) &= x^2 + 2x + 1 + 5x + 5 = 0 \\ f(x+1) &= x^2 + 7x + 6 = 0 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 6 \quad 1 \\ (x+6)(x+1) &= 0 \\ x_1 &= -6 \quad x_2 = -1 \quad \text{çık} = \{-6, -1\} // \end{aligned}$$

Örnek...10 :

Uygun koşullarda $f(x) = \sum_{k=0}^x \left(\frac{4^k - 5^k}{6^k} \right)$ ise

$\sum_{i=0}^1 f(i)$ kaçtır? $f(0) = \sum_{k=0}^0 \left(\frac{4^k - 5^k}{6^k} \right)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 f(i) &= f(0) + f(1) \text{ demektir.} \quad f(1) = \sum_{k=0}^1 \left(\frac{4^k - 5^k}{6^k} \right) \\ &= \sum_{k=0}^0 \left(\frac{4^k - 5^k}{6^k} \right) + \sum_{k=0}^1 \left(\frac{4^k - 5^k}{6^k} \right) \\ &= \left(\frac{4^0 - 5^0}{6^0} \right) + \left[\left(\frac{4^0 - 5^0}{6^0} \right) + \left(\frac{4^1 - 5^1}{6^1} \right) \right] \\ &= \left(\frac{1-1}{1} \right) + \left[\left(\frac{1-1}{1} \right) + \left(\frac{4-5}{6} \right) \right] \\ &= 0 + \left[0 + \left(-\frac{1}{6} \right) \right] = -\frac{1}{6} // \end{aligned}$$

Örnek...11 :

$f: \mathbb{R} - \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \frac{\prod_{k=1}^5 (1+x^{2^k})}{x^{64}-1}$ ise $f(5)$ kaçtır?

$$\begin{aligned} f(5) \text{ için } x \text{ yerine } 5 \text{ yazalım.} \quad f(5) &= \frac{\prod_{k=1}^5 (1+5^{2^k})}{5^{64}-1} \\ f(5) &= \frac{(1+5^2)(1+5^4)(1+5^8)(1+5^{16})(1+5^{32})}{(5^{32}-1)(5^{16}-1)(5^8-1)(5^4-1)(5^2-1)} \\ 5^{64}-1 &= (5^{32}-1)(5^{32}+1) \\ (5^{32}-1)(5^{32}+1) &= (5^{16}-1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) \\ (5^{16}-1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) &= (5^8-1)(5^8+1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) \\ (5^8-1)(5^8+1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) &= (5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) \\ (5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) &= (5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)(5^{32}+1) \\ f(5) &= \frac{1}{5^2-1} = \frac{1}{24} // \end{aligned}$$

Örnek...12 :

$f(x)=2x-3$ ise $f(5x+3)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti nedir?

$$\begin{aligned} \text{Önce } f(5x+3) \text{ bulalım.} \quad \text{Şimdi de } x' \text{ in } f(x) \text{ cinsinden değerini bulalım.} \\ x \text{ yerine } 5x+3 \text{ yazarsak} \quad f(x) = 2x-3 \\ f(5x+3) = 2(5x+3)-3 \\ f(5x+3) = 10x+3 \\ f(x)+3 = 2x \\ x = \frac{f(x)+3}{2} \\ \text{Burada yerine yazalım.} \\ f(5x+3) = 10 \left(\frac{f(x)+3}{2} \right) + 3 \\ f(5x+3) = 5f(x) + 18 // \end{aligned}$$

Örnek...13 :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \quad f(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ olarak tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonu için $f(2)=-1$ ise $f(8)$ kaçtır?

$f(x_1, x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ise ve $f(2)=-1$ i de kullanırsak

$$\begin{aligned} f(8) &= f(2, 4) = f(2) + f(4) \text{ şeklinde yazalım.} \\ f(8) &= f(2) + f(4) \rightarrow \text{burada } f(2) \text{ gibi yazalım.} \\ f(8) &= f(2) + f(2, 2) \\ f(8) &= f(2) + f(2) + f(2) \\ f(8) &= (-1) + (-1) + (-1) \\ f(8) &= -3 // \end{aligned}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 2

(FONKSİYON TEMEL KAVRAMLAR - DEĞER HESAPLAMA - DÖNGÜ TİPİ)

DEĞERLENDİRME

- 1) Tanımlı olduğu aralıkta $2.f(x) = \frac{4f(x+1)+x}{2}$ ve

$f(19) = -\frac{1}{4}$ ise $f(5)$ kaçtır? *Dözenleyelim.*

$$\begin{aligned} x=5 \text{ için } f(5) - f(6) &= \frac{5}{4} \\ x=6 \text{ için } f(6) - f(7) &= \frac{6}{4} \\ x=7 \text{ için } f(7) - f(8) &= \frac{7}{4} \\ &\vdots \\ x=18 \text{ için } f(18) - f(19) &= \frac{18}{4} \end{aligned}$$

$$f(5) - f(19) = \frac{5+6+7+\dots+18}{4}$$

$$f(5) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{161}{4}$$

$$f(5) = \frac{161}{4} - \frac{1}{4} = \frac{160}{4}$$

$$f(5) = 40 //$$

- 2) Tanımlı olduğu aralıkta

$$x.f(1+x) - x.f(x) = 2f(x) - f(x+1)$$

olan $y=f(x)$ fonksiyonu için $f(1)=4$ ise $f(10)=?$

Dözenlersek

$$\begin{aligned} x.f(x+1) + f(x+1) &= 2.f(x) + x.f(x) \\ (x+1).f(x+1) &= (x+2).f(x) \end{aligned}$$

Oranları özelliğinden

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\begin{aligned} x=1 \text{ için } \frac{f(2)}{f(1)} &= \frac{3}{2} \\ x=2 \text{ için } \frac{f(3)}{f(2)} &= \frac{4}{3} \\ x=3 \text{ için } \frac{f(4)}{f(3)} &= \frac{5}{4} \\ &\vdots \\ x=9 \text{ için } \frac{f(10)}{f(9)} &= \frac{11}{10} \end{aligned}$$

Taahhütlerle çarparsak.

$$\frac{f(2)}{f(1)} \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \cdot \frac{f(4)}{f(3)} \cdot \dots \cdot \frac{f(10)}{f(9)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{11}{10}$$

$$\frac{f(10)}{f(1)} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{f(10)}{4} = \frac{11}{2}$$

$$f(10) = 22 //$$

- 3) Uygun şartlarda $x=t+3$, $y=\frac{t+2}{t-5}$ parametrik ifadesiyle verilen $y=f(x)$ fonksiyonu x in hangi tamsayı değerleri için negatif değerler alır?

$$t = x-3 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} = x-3$$

$$xy - 3y - x + 3 = 5y + 2$$

$$xy - 3y + 5y = x - 3 + 2$$

$$y(x-8) = x-1$$

$$y = \frac{x-1}{x-8} \text{ eşitsizlikten}$$

$$x-1=0$$

$$x-8=0$$

$$x=1$$

$$x=8$$

x	1	8
x-1	-	+
x-8	-	-
$\frac{x-1}{x-8}$	+	+

$x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ için değerler negatif olur.

- 4) $f(x) = 2^{3+2x}$ fonksiyonu için $f(3x+\frac{1}{4})$,

$f(\frac{12x+3}{4})$ değerinin kaç katıdır?

$$f(3x+\frac{1}{4}) = 2^{3+2(3x+\frac{1}{4})} = 2^{3+6x+\frac{1}{2}} = 2^{6x+\frac{7}{2}}$$

$$f(\frac{12x+3}{4}) = f(\frac{3x+\frac{3}{4}}{1}) = 2^{3+2(3x+\frac{3}{4})} = 2^{3+6x+\frac{3}{2}} = 2^{6x+\frac{9}{2}}$$

$$\frac{f(3x+\frac{1}{4})}{f(\frac{12x+3}{4})} = \frac{2^{6x+\frac{7}{2}}}{2^{6x+\frac{9}{2}}} = 2^{6x+\frac{7}{2}-6x-\frac{9}{2}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ katı,}$$

- 5) $xf(x)+4=2.f(x)+3x$ bağıntısıyla verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

$$x.f(x) - 2.f(x) = 3x - 4$$

$$f(x).(x-2) = 3x-4$$

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$$

Bu fonksiyonda payda sıfır yapan $x=2$ değeri hariç x yerine tüm reel sayılar konabilir.

$$TK = \mathbb{R} - \{2\} //$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 2

(FONKSİYON TEMEL KAVRAMLAR - DEĞER HESAPLAMA - DÖNGÜ TİPİ)

HATA

- 6) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$ olarak verilen $f(x)$ fonksiyonu için $f(x) = (\sqrt[3]{2} - 2)$ değeri kaçtır?

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 10$ denklelim.

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 2$

$f(x) = (x+2)^3 + 2$

$f(\sqrt[3]{2} - 2) = ((\sqrt[3]{2} - 2) + 2)^3 + 2$
 $= (\sqrt[3]{2})^3 + 2$
 $= 2 + 2$
 $= 4 //$

- 7) $f(x) = 4x + 7$ ise $f(2x-3)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti nedir?

Önce $f(2x-3)$ 'i bulalım.

$f(2x-3) = 4(2x-3) + 7$

$f(2x-3) = 8x - 5$

$f(2x-3) = 8\left(\frac{f(x)-7}{4}\right) - 5$

$f(2x-3) = 2f(x) - 19 //$

- 8) $f(x) = 3x + 5$ ise $f(3x+2)$ fonksiyonunun $f(2x-1)$ türünden eşiti nedir?

Önce $f(3x+2)$ 'yi bulalım.

$f(3x+2) = 3(3x+2) + 5$

$f(3x+2) = 9x + 11$

$f(3x+2) = 3\left(\frac{f(2x-1)-2}{2}\right) + 11$

$f(3x+2) = \frac{3f(2x-1) - 6}{2} + 11$

$f(3x+2) = \frac{3}{2}f(2x-1) + 8 //$

- 9) $f(x) = \frac{x+2}{3+x}$ ise $f(2x+5)$ fonksiyonunun $f(x)$ türünden eşiti nedir?

$f(2x+5)$ 'i bulalım.

$f(2x+5) = \frac{(2x+5)+2}{3+(2x+5)}$

$f(2x+5) = \frac{2x+7}{2x+8}$

$f(2x+5) = \frac{2\left(\frac{-3f(x)+2}{f(x)-1}\right)+7}{2\left(\frac{-3f(x)+2}{f(x)-1}\right)+8}$

$f(2x+5) = \frac{-6f(x)+4+7f(x)-1}{-6f(x)+4+8f(x)-8}$

$f(2x+5) = \frac{f(x)+3}{2f(x)-4} //$

- 10) Uygun şartlarda tanımlı $f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{ax+5}{3+x}$ fonksiyonu için $f(1) = 2$ ise a kaçtır?

Hangi x için $f\left(\frac{1}{x-2}\right)$ 'nin $f(1)$ olacağını bulalım.

$\frac{1}{x-2} = 1$

$x-2 = 1$

$x = 3$

$x = 3$ derseniz $f\left(\frac{1}{3-2}\right) = \frac{a \cdot 3 + 5}{3+3}$

$f(1) = \frac{3a+5}{6}$

$2 \times \frac{3a+5}{6}$

$3a+5 = 12$

$3a = 7$

$a = \frac{7}{3} //$

- 11) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ f(x_1+x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ olarak tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonu için $f(2) = 25$ ise $f(8)$ kaçtır?

$f(8) = f(4+4) = f(4) \cdot f(4)$

$f(8) = f(4) \cdot f(4)$

$f(8) = f(2+2) \cdot f(2+2)$

$f(8) = f(2) \cdot f(2) \cdot f(2) \cdot f(2)$

$= 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25$

$= 25^4$

$= 5^8 //$