

FONKSİYONLAR BÖLÜM 11

MUTLAK DEĞER KAVRAMI (HATIRLATMA)

Her $x \in \mathbb{R}$ için $|x|$ ifadesi x in mutlak değeri diye okunur.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Örnek...1 :

$$|3| + |-2| = ? \quad 3+2=5 //$$

Örnek...2 :

$$x > 5 \text{ ise } |x-3| + |x-7| = ?$$

$$\begin{aligned} 5 < x < 7 \\ (x-3) + [-(x-7)] &= x-3-x+7=4 \\ 7 \leq x \\ x-3+x-7 &= 2x-10 // \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$$x^2 < x \text{ ise } |x-1| + |x+1| + x = ?$$

$$\begin{aligned} x^2 < x \text{ olan} \\ \text{aralık} \\ 0 < x < 1 \\ \text{aralığıdır.} \\ (-x+1) + (x+1) + x &= \\ -x+1+x+1+x &= \\ x+2 // \end{aligned}$$

Örnek...4 :

x, y, z bir üçgenin kenarları olmak üzere,
 $|x-y-z| + |-y-x+z| + |x+z-y| = ?$

$$\begin{aligned} |x-(y+z)| + |2-(x+y)| + |-(y-(x+z))| &= \\ \text{Her kenar diğer iki kenarın toplamından} & \text{negatif} \quad \text{negatif} \quad \text{pozitif, if} \\ &= [- (x-(y+z))] + [- (2-(x+y))] + [- (y-(x+z))] \\ &= -x+y+z - 2+x+y -y+x+z \\ &= x+y+z // \end{aligned}$$

Örnek...5 :

$$\begin{aligned} |x| > x \text{ ve } |y| = y \text{ ise } \frac{|x|}{y} + \frac{|x|}{y} + \frac{x}{|y|} &= ? \\ x \text{ negatif} & \text{negatif} \\ \text{olmalı} & -y < 0 \\ & y > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{y} + \frac{|x|}{y} + \frac{x}{|y|} &= \frac{-x}{y} + \frac{-x}{y} + \frac{x}{y} \\ &= \frac{-x}{y} // \end{aligned}$$

MUTLAK DEĞER ÖZELLİKLERİ

- 1) $|x| \geq 0$
- 2) $|x| = |-x|, |x-y| = |y-x|$
- 3) $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ tek ise} \\ |x|, & n \text{ çift ise} \end{cases}$
- 4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0)$
- 5) $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$
- 6) $|x| = a \Rightarrow x = a \text{ veya } x = -a$
- 7) $|x| = |y| \Rightarrow x = y \text{ veya } x = -y$
- 8) $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$
- 9) $|x| > a \Rightarrow x > a \text{ veya } x < -a$
- 10) $b < |x| < a \Rightarrow b < x < a \text{ veya } -a < x < -b$
- 11) $|x| < |y| \Rightarrow x^2 < y^2$

Örnek...6 :

$$|\sqrt{2}-1| + \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = ?$$

$$\underbrace{|\sqrt{2}-1|}_{\text{poz}} + \underbrace{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}_{\text{poz}} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}-2 //$$

Örnek...7 :

$$\begin{aligned} x < 0 < y \text{ ise } \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2}} - |x| + y &= ? \\ - & + \\ \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-y)^2} - |x| + y &= \\ |x| + |x-y| - |x| + y &= \\ -x + (-x+y) - (-x) + y &= \\ -x -x + y +x + y &= \\ 2y - x &= \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$$\begin{aligned} |x+1| &= 1002222 \\ \text{eşitliğini sağlayan } x \text{ değerleri toplamı nedir?} \\ x+1 &= 1002222 \quad x+1 = -1002222 \\ x &= 1002221 \quad x = -1002223 \\ \text{Toplamları} & -2 // \end{aligned}$$

Örnek...9 :

$$|x+4|-1=5$$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı nedir?

$$|x+4|-1=-5$$

$$|x+4|=-4$$

mutlak değer asla negatif olamaz.

Ø

Örnek...10 :

$$|x-2|+4-2x=21$$

denklemini sağlayan x değerleri nedir?

$$x < 2 \text{ için}$$

$$-x+2+4-2x=21$$

$$-3x+6=21$$

$$-3x=15$$

$$x=-5 \text{ ve } -5 < 2$$

$$x \geq 2 \text{ için}$$

$$x-2+4+2x=21$$

$$3x-6=21$$

$$3x=27$$

$$x=9 \text{ ve } 9 > 2$$

$$-10+2=-8//$$

Örnek...11 :

$$x^2+3|x|+2=0$$

denkleminin çözüm kümesi nedir? $GK=\{-5, 9\}$

$$x < 0$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$\downarrow$$

$$-2 \quad -1$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$x_1=2, x_2=1$$

2 ve 1 sıfırdan büyük değil.

$$GK=\emptyset$$

$$x \geq 0$$

$$x^2+3x+2=0$$

$$\downarrow$$

$$-2 \quad -1$$

$$(x+2)(x+1)=0$$

$$x_3=-2, x_4=-1$$

-2 ve -1 sıfırdan büyük değil.

$$GK=\emptyset$$

$$GK=\{ \} //$$

Örnek...12 :

$$x+7|x|+8=0$$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

$$x < 0$$

$$x-7x+8=0$$

$$-6x=-8$$

$$x=-\frac{8}{6}$$

$$x=-\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3} < 0 \text{ değil. } \emptyset$$

$$x \geq 0$$

$$x+7x+8=0$$

$$8x=-8$$

$$x=-1$$

$$-1 > 0 \text{ değil. } \emptyset$$

$$\emptyset$$

$$GK=\emptyset$$

Örnek...13 :

$$\sqrt{x^2-4x+4}+|x+2y|=0$$

denklemini sağlayan x ve y değeri için x.y kaçtır?

$$\sqrt{(x-2)^2}+|x+2y|=0$$

$$|x-2|+|x+2y|=0$$

$$x=2 \quad 2+2y=0$$

$$y=-1$$

$$x.y=2.(-1)=-2 //$$

Örnek...14 :

$$|2x-30976|<9$$

eşitsizliğini sağlayan kaç x tamsayı değeri vardır?

$$-9 < 2x-30976 < 9$$

$$-9+30976 < 2x < 9+30976$$

$$\frac{30867}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{30985}{2}$$

$$15433,5 < x < 15492,5$$

$$x=\{15434, 15435, \dots, 15492\}$$

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{15492-15434}{1} + 1 = \frac{58}{1} + 1$$

$$TS=59 //$$

Örnek...15 :

$$|x+1|-1 < 2$$

eşitsizliğinin çözümünü bulunuz.

$$-2 < |x+1|-1 < 2$$

$$-2+1 < |x+1|-1+1 < 2+1$$

$$-1 < |x+1| < 3$$

$$-1 < x+1 < 3 \text{ veya } -3 < x+1 < 1$$

$$-2 < x < 2 \text{ veya } -4 < x < 0$$

$$GK = (-4, 2) //$$

Örnek...16 :

$$|4x+5| > 1$$

eşitsizliğinin çözümünü bulunuz.

$$4x+5 > 1 \text{ veya } -4x+5 < -1$$

$$4x > -4$$

$$4x < -6$$

$$x > -1$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

$$GK = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{veya } GK = \mathbb{R} - [-\frac{3}{2}, -1] //$$

Örnek...17 :

$$4 < |4x+5| \leq 9$$

eşitsizliğinin çözümünü bulunuz.

$$4 < 4x+5 \leq 9 \text{ veya } -9 \leq 4x+5 < -4$$

$$4-5 < 4x+5-5 \leq 9-5$$

$$-9-5 \leq 4x+5-5 < -4-5$$

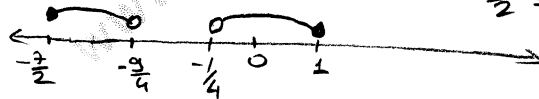
$$-1 < 4x \leq 4$$

$$-14 \leq 4x < -9$$

$$-\frac{1}{4} < x \leq 1$$

$$-\frac{14}{4} \leq x < -\frac{9}{4}$$

$$-\frac{7}{2} \leq x < -\frac{9}{4}$$



$$GK = [-\frac{7}{2}, -\frac{9}{4}] \cup (-\frac{1}{4}, 1] //$$

7) $\frac{|x-2|-5}{|x+2|} < 0$ eşitsizliğinin çözümünü bulunuz?

$x \neq -2$ olmalı.
 $|x+2|$ daima pozitif.
O zaman $|x-2|-5$ negatif
olmalı ki eşitsizlik
sağlansın.

$$\begin{aligned} |x-2|-5 &< 0 \\ |x-2| &< 5 \\ -5 &< x-2 < 5 \\ -5+2 &< x-2+2 < 5+2 \\ -3 &< x < 7 \end{aligned}$$

$GK = (-3, 7) //$

8) $|x-6| \leq |x-3|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz?

İki taraf ta pozitif olduğundan karelerini
alalım.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 36 &\leq x^2 - 6x + 9 \\ 36 - 9 &\leq -6x + 12x \\ 27 &\leq 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{27}{6} &\leq x \\ \frac{9}{2} &\leq x \end{aligned}$$

$GK = \left[\frac{9}{2}, \infty \right) //$

9) $f(x) = |x+2|$, $g(x) = |x|-4$ fonksiyonları için
 $f \circ g(x) = 1$ denkleminin çözüm kümesini
bulunuz?

$$f(g(x)) = |(1|x|-4)+2| = 1$$

$$|1|x|-2| = 1$$

$$|x|-2 = 1$$

$$|x| = 3$$

$$x = \{3, -3\}$$

$$|x|-2 = -1$$

$$|x| = 1$$

$$x = \{-1, 1\}$$

$GK = \{-3, -1, 1, 3\}$

10) $\sqrt{x^2-6x+9} \leq |x-2|$ eşitsizliğinin çözüm
kümesini bulunuz?

$$\sqrt{(x-3)^2} \leq |x-2|$$

$$|x-3| \leq |x-2| \quad \text{Her iki tarafın karesini alalım,}$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq x^2 - 4x + 4$$

$$9 - 4 \leq -4x + 6x$$

$$\frac{5}{2} \leq \frac{2x}{1}$$

$$\frac{5}{2} \leq x$$

$GK = \left[\frac{5}{2}, \infty \right)$

11) $|x^2+x-6| \leq |x-2|$ eşitsizliğinin çözüm
kümesini bulunuz?

x^2+x-6 çarpanlarına ayırırsak

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} +3 & -2 \\ (x+3) \cdot (x-2) \end{matrix} \end{aligned}$$

$$|(x+3) \cdot (x-2)| \leq |x-2|$$

$$|x+3| \cdot |x-2| \leq |x-2|$$

$$|x+3| \cdot |x-2| - |x-2| \leq 0$$

$$|x-2| (|x+3| - 1) \leq 0$$

$x=2$ sadece
sağlar.
Diğer değerler için
pozitifdir.

O zaman bunun negatif (veya sıfır)
olması gerekir.

$$|x+3| - 1 \leq 0$$

$$|x+3| \leq 1$$

$$-1 \leq x+3 \leq 1$$

$$-4 \leq x \leq -2$$

$GK = [-4, -2] \cup \{2\} //$