

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

(FONKSİYONUN TANIM , DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

FONKSİYONLAR BÖLÜM 1

FONKSİYONUN TANIMI, TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ, GRAFİK, İŞLEMLER, DEĞER HESAPLAMA

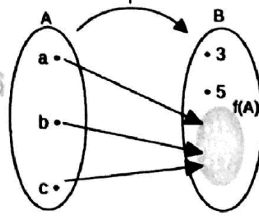
FONKSİYON

A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen kurala A'dan B'ye bir fonksiyon denir.

HATIRLATMA

Not: A'nın elemanlarını B'nin elemanlarıyla rastgele eşleyen ifadelerle bağıntı denir. Aslında fonksiyonlar özel bağıntılardır.

Bir f fonksiyonu A kümesindeki x gibi bir elemanı B kümesinden y gibi bir elemanla eşliyorsa bunu $f: A \rightarrow B$ şeklinde gösteririz. Burada A kümesine tanım kümesi; B kümesine ise değer kümesi denir. Örneği inceleyiniz.



f kuralı A'nın her elemanını B'nin bir ve yalnız bir elemanı ile eşlemiş olduğundan bir fonksiyondur.

Bu fonksiyonun tanım kümesi $A=\{a,b,c\}$ değer kümesi ise $B=\{3,5,11,17\}$ kümesidir.

f fonksiyonu için $f(a)=11$, $f(b)=17$, $f(c)=17$ olduğundan bu fonksiyonu liste biçiminde $f=\{(a,11),(b,17),(c,17)\}$ şeklinde yazabiliriz.

Burada A'daki elemanların f fonksiyonu altında B'deki eşleştiği değerlere f fonksiyonunun görüntü kümesi denir ve bu küme $f(A)=\{y: x \in A, y \in B, f(x)=y\}$ kümesidir.

Bu örnekte $f(A)=\{11,17\}$.

Bunun dışında fonksiyonları kuralları ile de verebiliriz.

Örneğin $A=\{0,1,2\}$ kümesinden $B=\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesine tanımlı $y=f(x)=x+1$ fonksiyonunu inceleyelim.

$f=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ olarak elde edilir. burada $f(A)=\{1,2,3\}$ kümesi f kümesinin görüntü kümesidir.

Örnek...1 :

$A=\{a,b,2\}$ kümesinden $B=\{0,1,2,3,4\}$ kümesine tanımlı bağıntılardan hangileri birer fonksiyondur?

$f=\{(a,0),(b,0),(c,0)\}$ Fonk. değil. $2 \in A$ için $f(2)$ tanımlı değil.

$g=\{(a,0),(b,1)\}$ Fonk. değil, $2 \in A$ için $f(2)$ tanımlı değil.

$h=\{(a,4),(b,b),(c,3)\}$ Fonk. değil. $c \notin A$

$t=\{(a,2),(a,3),(b,4),(c,3)\}$ Fonk. değil.

Hem $f(a)=2$ hem de $f(a)=3$
Bir eleman birden fazla elemana gidemez.

Örnek...2 :

$A=\{-2,-1,2,5\}$ kümesinden reel sayılar kümesine tanımlı $f(x)=3x^2+x-5$ fonksiyonu için görüntü kümesini bulunuz.

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 12 - 2 - 5 = 5$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + (-1) - 5 = 3 - 1 - 5 = -3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 12 + 2 - 5 = 9$$

$$f(5) = 3 \cdot 5^2 + 5 - 5 = 75 + 5 - 5 = 75$$

$$f(A) = \{-3, 5, 9, 75\}$$

Örnek...3 :

$f: A \rightarrow R$, $f(x)=3^x-1$ ve $f(A)=\{0,26,80\}$ ise A kümesinin elemanları toplamı kaçtır?

$$\begin{cases} 3^x - 1 = 0 \\ 3^x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x - 1 = 26 \\ 3^x = 27 \\ x = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x - 1 = 80 \\ 3^x = 81 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$A = \{0, 3, 4\}$$

$$\text{elemanlar toplamı } 0+3+4=7 //$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

(FONKSİYONUN TANIM , DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

Örnek...4 : $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{5x-4}{x^2+2}$ ifadesi bir fonksiyon belirtir mi? $1 \in \mathbb{Z}$ için $f(1) = \frac{5 \cdot 1 - 4}{1^2 + 2} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ Fonksiyon belirtmez.

Örnek...5 :

Hangileri tanımlandıkları kümede fonksiyon belirtir?

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{5x-4}{x^2+2}$ belirtmez. $1 \in \mathbb{Z}$ için $f(1) = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ belirtir. $x^2+2=0$ yapan bir değer yok.

c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ belirtir.

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$

e) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |x-2|$ Fonk. belirtir. $x=2$ için $f(2)$ doğal sayı değil. $\forall x \in \mathbb{N}$ için sonuç bir doğal sayıdır.

Örnek...6 :

$K = \{0, 1, 2, 3\}$ kümeinden reel sayılara tanımlı $f(x) = x!$ fonksiyonunda görüntü kümesinin elemanları toplamı kaçtır?

Görüntü kümesi

$$\begin{aligned} f(0) &= 0! = 1 \\ f(1) &= 1! = 1 \\ f(2) &= 2! = 2 \\ f(3) &= 3! = 6 \end{aligned} \quad f(A) = \{1, 2, 6\} \quad 1+2+6 = 9 //$$

Örnek...7 :

$K = [4, 9]$ kümeinden reel sayılara tanımlı $f(x) = x+2$ fonksiyonunda görüntü kümesi nedir?

Bu bir doğrusal fonksiyon. Doğrusal fonksiyonlarda görüntü kümesini bulmak için tanım kümesinin uç noktalarını yerine koymak yeterlidir.

$$\begin{aligned} f(4) &= 4+2 = 6 \\ f(9) &= 9+2 = 11 \end{aligned} \quad f(A) = [6, 11]$$

Örnek...8 :

Reel sayılarda $f(x) = \sin x + 2$ fonksiyonunda görüntü kümesi nedir?

Bunu adım adım yapabiliriz. $f(x) = \sin x$ olsaydı görüntü kümesi $[-1, 1]$ aralığında olurdu. (Sinüs fonksiyonları)

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\begin{aligned} \text{Her tarafa} \\ +2 \text{ ekledim} \quad -1+2 \leq \sin x + 2 \leq 1+2 \\ 1 \leq f(x) \leq 3 \end{aligned}$$

$$\text{Görüntü kümesi} = [1, 3] //$$

Örnek...9 :

$f: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, $f(x) = \frac{3x-14}{x-2}$ fonksiyonunun görüntü kümesinde kaç tane tamsayı vardır?

Bu tür sorular düzenlenerek sadeleştirilme yapılır.

$$f(x) = \frac{3(x-2) - 8}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} - \frac{8}{x-2} = 3 - \frac{8}{x-2}$$

$x-2$ 'nin $8, 4, 2, 1, -8, -4, -2, -1$ değerleri için tamsayı olur. 8 tamsayı değeri oluşur. //

BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ :

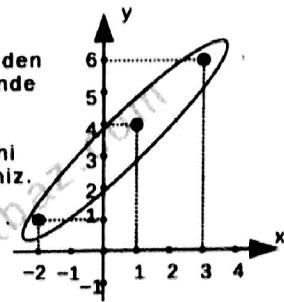
f , A kümesinden B kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için oluşan $(x, f(x))$ noktalarına düzlemde karşılık gelen noktalar kümesine f fonksiyonun grafiği denir.

Örnek...10 :

$A = \{-2, 1, 3\}$ kümesinden reel sayılar kümesinde tanımlı

$f(x) = x+3$ fonksiyonun grafiğini çizilmiştir. İnceleyiniz.

Görüntü kümesi 3 elemandan oluştuğundan grafikte 3 nokta vardır. (Bu noktalar genelde burada aldığı gibi kapalı bir eğri içine alınmazlar)

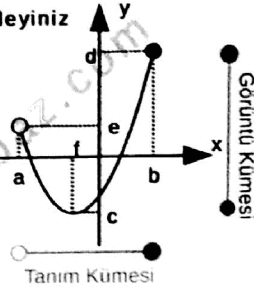


ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

(FONKSİYONUN TANIM , DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

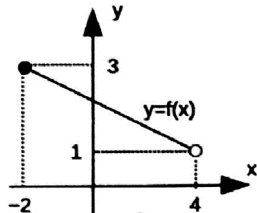
Aşağıdaki grafiği inceleyiniz

Verilen grafiğe göre fonksiyonun tanım kümesi $[a,b]$ ve görüntü kümesi $[c,d]$ olarak yazılabilir.



Örnek...11 :

Grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

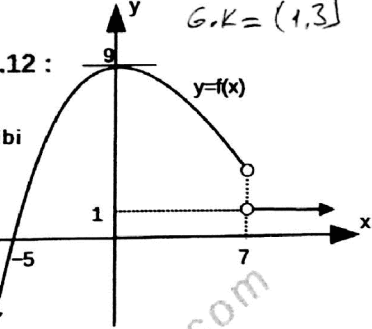


Tanım kümesi bulunurken x eksenine dik doğrular çıkarılır. Fonksiyonu tek bir noktada kesen doğrular tanım kümesine eklenir, kesmeyen veya a birden çok noktada kesenler $(x=4)$ kesilen doğru fonksiyonu kesmez. eklenmez. $TK = [-2, 4]$ (kmeden çıkarıldı)

Görüntü kümesi bulunurken y eksenine dik doğrular çıkarılır. Fonksiyonu kesmeyenler kmeden çıkarılır, bir yada birkaç noktada kesenler kümeye eklenir. $GK = [1, 3]$

Örnek...12 :

Grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.



örnek 11'deki yöntemle göre

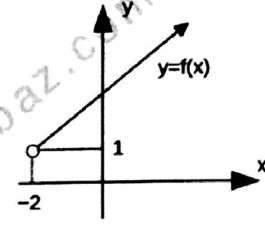
$$TK = [-5, 7] \text{ veya } TK = (-\infty, 7) \cup (7, \infty)$$

$$GK = (-\infty, 9]$$

Örnek...13 :

Yandaki fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

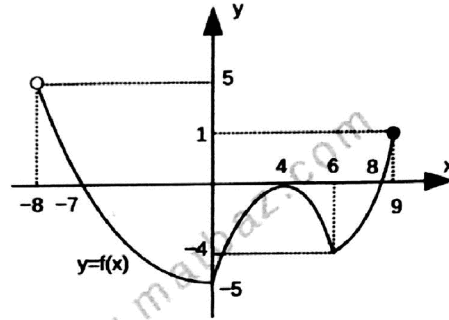
Örnek 11'deki yöntemle göre



$$TK = (-2, \infty)$$

$$GK = (1, \infty)$$

Örnek...14 :



Grafiği şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonun tanım kümesi A, görüntü kümesi B ise $A-B$ fark kümesini bulunuz.

Örnek 11'deki yöntemle göre

$$TK = A = [-8, 9]$$

$$GK = B = [-5, 5]$$

$$A-B = (-8, -5) \cup [5, 9]$$

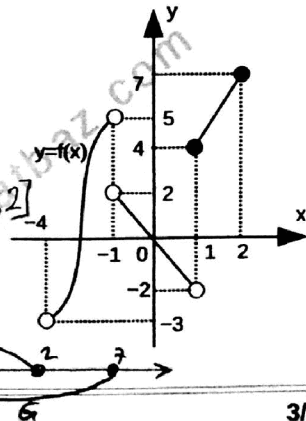
Örnek...15 :

Tanım kümesi T, görüntü kümesi G ise $T \cap G = ?$

Örnek 11'deki yöntemle göre

$$TK = [-4, -1] \cup (-1, 2]$$

$$GK = [-3, 7]$$



$$T \cap G = (-3, -1) \cup (-1, 2) \text{ veya } (-3, 2) - \{-1\}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

(FONKSİYONUN TANIM, DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

Önce $T(r, k)$ 'yı bulalım.

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

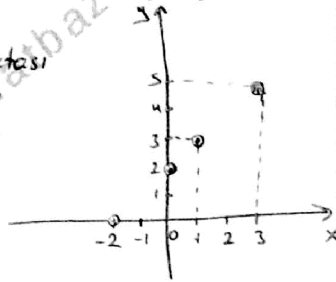
$$k = f(r) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 = 3$$

Şimdi $T.K.$ 'nın
ve noktalarının
görüntüsünü bulalım.
 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 4$
 $f(5) = 5^2 - 2 \cdot 5 + 4 = 19$

Örnek...16 :

$A = \{-2, 0, 1, 3\}$ kümesi verilsin.
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ fonksiyonun grafiğini
çiziniz.

$$\begin{aligned} f(-2) &= -2 + 2 = 0 & (-2, 0) \text{ noktası} \\ f(0) &= 0 + 2 = 2 & (0, 2) \text{ " } \\ f(1) &= 1 + 2 = 3 & (1, 3) \text{ " } \\ f(3) &= 3 + 2 = 5 & (3, 5) \text{ " } \end{aligned}$$



UYARI:

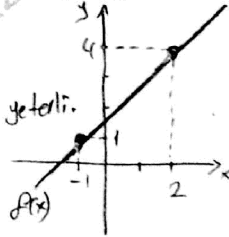
Doğru grafiklerini çizmek için iki nokta ,
ikinci dereceden fonksiyonların
grafiklerini çizmek için eksenleri kestiği
nokta(lar) ve tepe noktası kullanılabilir.

Örnek...17 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$ Fonksiyonun grafiğini
çiziniz.

Tanım kümesi tüm reel sayılar
olduğundan doğrusal fonksiyonu
çizmek için herhangi iki nokta yeterli.

$$\begin{aligned} x = -1 \text{ için } f(-1) &= -1 + 2 = 1 \\ x = 2 \text{ için } f(2) &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$



Örnek...18 :

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 4x - 32$ fonksiyonun grafiğini
çiziniz.

Bu bir parabol'dür.

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$x^2 + 8x - 4x - 32 = 0$$

$$(x + 8)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = -8 \quad x_2 = 4$$

(x eksenini kestiği
noktalar)

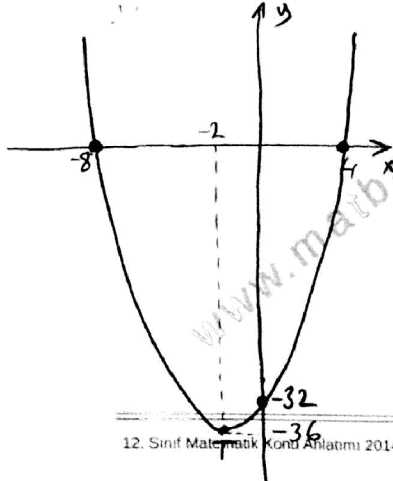
$$x = 0 \text{ için } f(0) = -32$$

(y eksenini kestiği
nokta)

$$r = -\frac{b}{2a}$$

$$r = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

(Tepe noktasının
apsisi)



12. Sınıf Matematik Konu Anlatımı 2014-2015

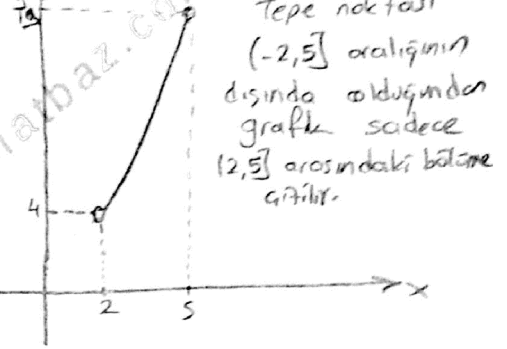
$$k = f(r) = f(-2)$$

$$k = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 32$$

$$k = -36 \text{ (Tepe noktasının
ordinatı)}$$

Örnek...19 :

$f: (2, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonun grafiğini
çiziniz.



UYARI:

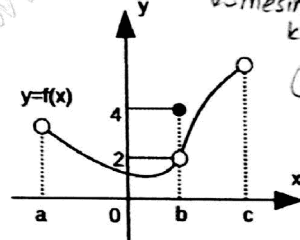
Fonksiyonlar özel bağıntılar olduğundan
verilen bir bağıntı grafiğinin fonksiyon
olup olmadığını anlamak için y eksenine
paralel olacak şekilde doğrular
çizildiğinde verilen tanım kümesindeki
değerler için bu dikey doğruların grafiği
tam olarak bir noktada kesmesi gerekir.

Örnek...20 :

Şekilleri inceleyiniz tanım aralıklarında
verilmiş bağıntılardan hangileri fonksiyon
olur?

i) $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

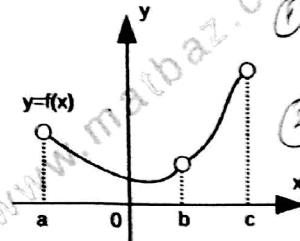
① (a, b) arasındaki her elemanın
görüntüsü var. Yani Tanım
kümesinde boşta eleman
kalmamış.



② (a, b) arasındaki
her noktanın sadece
bir görüntüsü var.
Yani birden fazla
nokta ile eşleşmemişler.

İki şartı da sağladığından fonksiyon belirtir.

ii) $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$



① (a, b) arasındaki tüm
sayıların görüntüsü var.

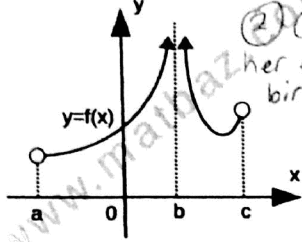
② (a, b) arasındaki
herbir noktanın
birden fazla
görüntüsü yok.

Fonksiyon belirtir.

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

(FONKSİYONUN TANIM , DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

iii) $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

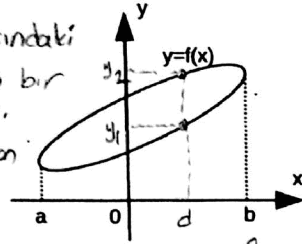


① (a,b) aralığındaki
tüm sayıların görüntüsü
var.

② (a,b) aralığındaki
her elemanın tek
bir görüntüsü
var.

fonksiyon
belirtir.

iv) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$



① $[a,b]$ aralığındaki
her elemanın bir
görüntüsü var.
(eşlenmemiş eleman
kalmamış.)

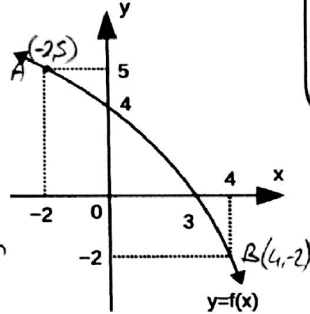
② $[a,b]$ aralığındaki bazı
elemanlar birden fazla
nokta ile eşlenmiş.
(mesela d noktası hem y_1 ile hem y_2 ile eşlenmiş)

fonksiyon
belirtmez.

Örnek...21:

Grafiği verilen
 $y=f(x)$ fonksiyonu
için

$$f(-2) + f(4) = ?$$



A noktası $(-2, 5)$ olduğundan
 $f(-2) = 5$ demektir.

B noktası $(4, -2)$ olduğundan
 $f(4) = -2$ demektir.

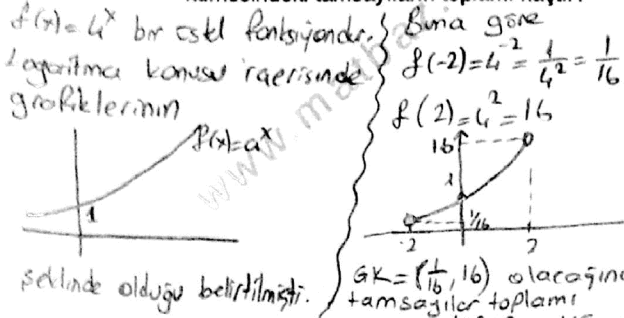
$$\begin{aligned} f(-2) + f(4) &= \\ 5 + (-2) &= \\ 3 &= \end{aligned}$$

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLAR - 1

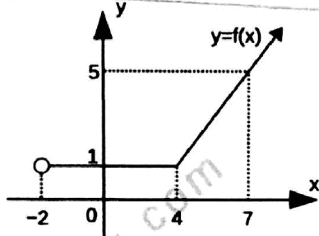
(FONKSİYONUN TANIM , DEĞER VE GÖRÜNTÜ KÜMESİ - GRAFİK - İŞLEM - DEĞER HESAPLAMA)

DEĞERLENDİRME

- 1) $f: (-2,2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki tamsayıların toplamı kaçtır?



- 2) Grafiği şekildedeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonun tanım kümesi A görüntü kümesi B ise A-B kümesini yazınız.



Konu anlatım bölümünde Örnek 11'deki yantıya göre

$$TK = (-2, \infty) = A$$

$$GK = [1, \infty) = B$$

$$A - B = (-2, 1) //$$

- 3) $f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{7\}$, $f(x) = \frac{7x-1}{x-3}$ fonksiyonunun görüntü kümesinde kaç tane tamsayı vardır?

Düzenleyip sadeleştirelim.

$$f(x) = \frac{7(x-3)+20}{x-3} = \frac{7(x-3)}{x-3} + \frac{20}{x-3} = 7 + \frac{20}{x-3}$$

$x-3$ 'ün 20'nin böleni olduğu her değer $f(x)$ 'i tamsayı yapar.

20'nin tüm bölen sayısı

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

$$= 2 \cdot \text{pozitif bölen sayısı}$$

$$= 2 \cdot (2+1) \cdot (1+1)$$

$$= 12 //$$

- 4) $K = [-2, 6]$ kümesinden reel sayılara tanımlı $f(x) = -2x+3$ fonksiyonu için görüntü kümesi nedir?

Bu bir doğrusal fonksiyon olduğundan tanım kümesinin (K kümesi) uç noktalarına bakmak yeterlidir.

$$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 7$$

$$f(6) = -2 \cdot 6 + 3 = -9$$

$$G.K = [-9, 7] //$$

- 5) $K = [-4, 5]$ kümesinden reel sayılara tanımlı $f(x) = x^2 - 6x + 1$ fonksiyonu için görüntü kümesi nedir?

Bu bir parabol fonksiyon olduğundan tanım kümesinin uç noktalarına ve ayrıca tepe noktasının apsisi K'nin elemanıysa birde ona bakarız. K'nin elemanı değilse tepe noktasının durumunu incelemeye gerek yoktur.

Bu üç değerden en küçük olanı görüntü kümesinin alt sınırı, en büyük olanı da üst sınırıdır.

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3 \in K \text{ kümesi}$$

$$k = f(r) = f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$$

$$f(-4) = (-4)^2 - 6 \cdot (-4) + 1 = 41$$

$$f(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 1 = -4$$

(5 $\notin$ K sadece sınırı belirlemek için kullanacağız. Dahil etmeyeceğiz.)

Bu üçüne göre

$$GK = [-8, 41]$$