

LİMİT - 7

($\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ)

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 7

$\infty - \infty$ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİKLER

$\lim_{x \rightarrow \infty} (P(x) + Q(x)) = \infty - \infty$ veya
 $\lim_{x \rightarrow a} (P(x) + Q(x)) = \infty - \infty$ oluyorsa $\infty - \infty$
 belirsizliği vardır denir.

Bu belirsizlik türünde

i) İki ayrı kesirli ifade varsa paydaları eşitlenerek tek kesir haline getirilir.

ii) Tanjant ve kotanjant ifadeleri varsa yerine sinüs ve kosinüs cinsinden eşitleri yazılır.

iii) Köklü ifade varsa bunu rasyonel yapacak genişletmeler yapılır.

i), ii), iii) ifadeleri uygulandığında $\infty - \infty$ belirsizliği 0/0 veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinden birine dönüştürülür ve limiti bulunur.

Örnek...1:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = ? \quad \frac{x+2-u}{x^2-u}$$

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Örnek...2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x) = ? \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

Örnek...3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log(50x+1) - \log(5x+4)) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{x}{2} = \tan 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{50x+1}{5x+4} \right) = \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{50x+1}{5x+4} \right)$$

$$= \log(10) = 1$$

Örnek...4:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+6x+n} - \sqrt{x^2+2x+m}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x+3| - |x+1|) = -x-3 + x+1 = -2$$

Örnek...5:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = ? \quad \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\infty + \infty + \infty} = 0$$

Örnek...6:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+9x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+12x+2}) = ? \quad \sqrt[n]{a_n} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} \right)$$

$$= \sqrt[3]{1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{9}{3 \cdot 1} \right) - \sqrt[3]{1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{0}{3 \cdot 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x + \frac{9}{3} \right) - (x+0) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{9}{3} - x \right) = \frac{9}{3} = 3$$

Örnek...7:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x-13} - \sqrt{x^2+3x-13}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (|x+\frac{1}{2}| - |x+\frac{3}{2}|)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+\frac{1}{2} - x-\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

NOT $x \rightarrow \infty$ mutlak değer parantez olarak alındı.

NOT
 Limit-1 notunda 3. sayfadaki Teorem-2'nin 8. özelliğinden yararlanıldı

LİMİT - 7

($\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ)

($\infty - \infty$)

Örnek...8:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + mx + n} - \sqrt{x^2 + nx + m}) = 4 \text{ ise } m - n$$

kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| x + \frac{m}{2} \right| - \left| x + \frac{n}{2} \right| \right) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - \frac{m}{2} + x + \frac{n}{2} \right) = 4$$

$$-\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = 4$$

$$-m + n = 8$$

$$m - n = -8 //$$

HATA

sadece a sorulmalıydı.

$$16x^2 - mx + 1 = \left(4x - \frac{m}{8} \right)^2$$

Örnek...9:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x^2 - mx + 1} + ax + b) = \frac{1}{2} \text{ ise } a - b \text{ kaçtır?}$$

byok

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| 4x - \frac{m}{8} \right| + ax + b \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4x + \frac{m}{8} + ax + b \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left((-4 + a)x + \frac{m}{8} + b \right) = \frac{1}{2}$$

x yakaladıkça limit bir sayı çıkmaz, ∞ çıkar. Dolayısıyla a=4 olmalı.

$$\frac{m}{8} + b = \frac{1}{2} \text{ olmalı.}$$

Burada m ve b bu bilgiyle bulunamaz.

($\infty - \infty$)

Örnek...10:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1})\sqrt{x}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(|x-1| - |x-\frac{1}{2}| \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x-1 - x + \frac{1}{2} \right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} //$$

($\infty - \infty$)

Örnek...11:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 4} - x + 2) = ?$$

x $\rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left| x + \frac{3}{2} \right| - x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{3}{2} - x + 2 \right)$$

$$= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2} //$$

($\frac{\infty}{\infty}$)

Örnek...12:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{4x^2 - x + 1} + 2x - 3}{|3 - x|} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|2x - \frac{1}{4}| + 2x - 3}{|3 - x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2x + \frac{1}{4} + 2x - 3}{3 - x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\frac{1}{4} - 3}{-x + 3} \right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4} - 3}{\infty} = 0 //$$

Limit yok

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{e^x - e} \right) = ?$$

x, 1⁺

x-1'in değeri e^x-e'nin değerinden daha büyüktür.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} \right)$$

e^x-e'ye 0⁺ dersek

x-1'e 0⁺ diyebiliriz.

Bunun sensusluğu $\downarrow$ bunun sensusluğundan büyüktür.

pozitif çok küçük bir sayı, pozitif biraz daha büyük bir sayı

($\infty - \infty$) gibi = $\infty //$

Örnek...14:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3^x - 1} - \frac{2}{9^x - 1} \right) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3^x - 1} - \frac{2}{(3^x - 1)(3^x + 1)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x + 1 - 2}{(3^x - 1)(3^x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x - 1}{(3^x - 1)(3^x + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3^x + 1}$$

$$= \frac{1}{3^0 + 1} = \frac{1}{2} //$$

LİMİT - 7

($\infty - \infty$ BELİRSİZLİĞİ)

DEĞERLENDİRME

($\infty - \infty$)

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2} //$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+16x+4} - \sqrt{x^2+12x-122}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (|x+8| - |x+6|)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x+8 - x-6) = 2 //$$

($\infty - \infty$)

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x+1} - \sqrt{16x-1}) = ? \quad \frac{\sqrt{16x+1} + \sqrt{16x-1}}{\sqrt{16x+1} + \sqrt{16x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(16x+1) - (16x-1)}{\sqrt{16x+1} + \sqrt{16x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{16x+1} + \sqrt{16x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{16x+1} + \sqrt{16x-1}} \right) = \frac{2}{\infty + \infty} = 0 //$$

($\infty - \infty$)

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2-4x+1} - 2x+3) = ? \quad \begin{matrix} 4x^2-4x+1 = \\ (2x-1)^2 + \dots \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (|2x-1| - 2x+3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x+1 - 2x+3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x+4)$$

$$= \infty //$$

($\infty - \infty$)

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3-12x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-x-2}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^3(1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3})} - \sqrt[3]{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sqrt[3]{1-\frac{12}{x}+\frac{1}{x^3}} - x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^{\frac{2}{3}}) = \infty$$

NOT

$x > x^{\frac{2}{3}}$ olduğundan
 $x \rightarrow \infty$
 $x - x^{\frac{2}{3}} = \infty$ olur.

($\infty - \infty$)

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{\tan x} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\cos x - \cos x \sin x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\cos x - \cos x \sin x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \frac{1+1-0}{0^+} = \infty //$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log \sqrt{50x-\pi} - \log \sqrt{0.5x+e}) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{\sqrt{50x-\pi}}{\sqrt{0.5x+e}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \sqrt{\frac{50x-\pi}{0.5x+e}} \right)$$

$$= \log \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{50x-\pi}{0.5x+e} \right) \right) = \log \left(\sqrt{100} \right)$$

$$= \log 10$$

$$= 1 //$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\log_{\sqrt{3}} \sqrt{36x+3} - \log_3 (4x+3)) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{36x+3} - \log_3 (4x+3) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \log_3 \sqrt{36x+3} - \log_3 (4x+3) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \log_3 \sqrt{36x+3} - \log_3 (4x+3) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_3 (\sqrt{36x+3})^2 - \log_3 (4x+3) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log_3 \left(\frac{36x+3}{4x+3} \right) \right) = \log_3 \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{36x+3}{4x+3} \right)$$

$$= \log_3 \left(\frac{36}{4} \right)$$

$$= \log_3 9 = 2 //$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{5^x-1} - \frac{2}{25^x-1} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x+1-2}{(5^x-1)(5^x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x-1}{(5^x-1)(5^x+1)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{5^x+1} \right) = \frac{1}{5^0+1} = \frac{1}{2} //$$