

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 5

LİMİT HESABINDA BELİRSİZLİK DURUMLARI

$y=f(x)$ fonksiyonu için bazen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ değeri bulunurken x yerine a yazdığımızda $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0$ durumları ile karşılaşabiliriz. Sonuç olarak $f(x)$ fonksiyonunda $x \rightarrow a$ veya $x \rightarrow \infty$ için hesaplanan limit yukarıdaki ifadelerden biri oluyorsa, bir belirsizlik durumu vardır denir. Belirsizlik giderilerek limit var ise bulunabilir. Uyarı: Buradaki sayıların gerçek 0, gerçek 1 olmadığını fark ediniz.

$\frac{0}{0}$ BİÇİMİNDEKİ BELİRSİZLİKLER

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$
farklı durumlar için
a) kesrin pay vepaydasında $x-a$ çarpanı sadeleştirilebilir
b) pay ve payda 1 ile genişletilebilir (!!)
c) değişken değiştirilebilir
Son durumda ifadeler düzenlenir, sadeleştirme yapılır ve limit alınır.

Örnek...1:
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = ?$
 $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$
 $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4$

Örnek...2:
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}} = ?$
 $\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}{(x+2-3)}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+2}+\sqrt{3}) = \sqrt{1+2}+\sqrt{3} = 2\sqrt{3} //$

Örnek...3:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}-1)} = ?$ Yol gösterme $x=t^6$ değişken değiştirmesi yapabilirsiniz.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{t^2-1} = \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{x}+6\sqrt{x}+1}{6\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{1}+6\sqrt{1}+1}{6\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2} //$

Örnek...4:

$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{(x-6)^2} = ?$
 $\frac{(x-6)(x+6)}{(x-6)^2}$

$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+6}{x-6} = \frac{6+6}{6-6} = \frac{12}{0} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{x+6}{x-6} = \frac{6+6}{0^-} = -\infty$

Limit yok //

Örnek...5:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{(x^2-2x+1)} = ?$
 $\frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = x-1$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 //$

Örnek...6:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{\sqrt{x+h^2}-\sqrt{x}} = ?$
 $\frac{h^2(\sqrt{x+h^2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+h^2}+\sqrt{x}} = \frac{h^2(\sqrt{x+h^2}+\sqrt{x})}{x+h^2}$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(\sqrt{x+h^2}+\sqrt{x})}{h^2} = \sqrt{x+0^2}+\sqrt{x} = 2\sqrt{x} //$

Örnek...7:

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x^3-27)} = ?$
 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x^2+3x+9)}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(x^2+3x+9)} = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{3})(9+9+9)}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot 27} = \frac{1}{54\sqrt{3}} //$

Örnek...8:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^2-h^2}{h^6-y^6} = ?$
 $\frac{y^2-0^2}{0^2-y^6} = \frac{y^2}{-y^6} = -\frac{1}{y^4}$

NOT
Burada belirsizlik yoktur.

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

UYARI

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}$ ve $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oluyorsa
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ olmalıdır. Buradaki bölümün
 $x \rightarrow a$ limit değeri belirsizlik kaldırıldıktan sonra bulunmuştur.

Örnek...9: ?

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x - 1} = k \in \mathbb{R}$ ise $a + k = ?$ k gelsin, a olmalı ki belirsizlik giderilsin.

$$\begin{aligned} x \rightarrow 1 \quad 1^2 + a \cdot 1 + 2 &= 0 \quad \text{ise } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\ 1 + a + 2 &= 0 \\ a &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} &= 1 - 2 = -1 = k \end{aligned}$$

Örnek...10:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = n \in \mathbb{R}$ ise (m, n) ikilisini bulunuz. 0 olmalı ki belirsizlik giderilsin. n bulunsun. $x^2 + mx + n = 0$ olmalı. $1^2 + m \cdot 1 + n = 0$ $m + n = -1$

$$\begin{aligned} &\text{Polinom bölmesi yaparsak} \\ &\frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = x + (m+1) + \frac{m+n+1}{x-1} \\ &\lim_{x \rightarrow 1} (x + (m+1) + \frac{m+n+1}{x-1}) = n \end{aligned}$$

Örnek...11:

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + mx + 3} = \frac{1}{2}$ ise $m = ?$ 0 olmalı ki belirsizlik giderilsin. bir değer bulunsun. $x \rightarrow 3 \quad 3^2 + m \cdot 3 + 3 = 0$ $3m = -12$ $m = -4$

Örnek...12:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{5^x - 6^{-x}} &= \frac{1}{5^{0^-} - 6^{-(0^-)}} \\ &= \frac{1}{5^\infty - 6^{0^+}} \\ &= \frac{1}{5^\infty} - 6^{0^+} \\ &= \frac{1}{\infty} - 1 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\frac{0}{0}$

Örnek...13:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{13+x} - 4}{x^3 - 27} &= \frac{\sqrt{13+x} + 4}{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{13+x}+4)} = \frac{13+x-16}{(x-3)(x^2+3x+9)(\sqrt{13+x}+4)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x^2+3x+9)(\sqrt{13+x}+4)} &= \frac{1}{(9+9+9)(\sqrt{16}+4)} \\ &= \frac{1}{27 \cdot 8} = \frac{1}{216} \end{aligned}$$

Örnek...14:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{15}{x}}{(5 + \frac{3}{x})^2 - 25} = \frac{\frac{15}{\infty}}{(\frac{25}{\infty}) - 25} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği.}$$

Dışarıya çıkıp belirsizliği yokedelim. Belirsizliğin kaynağı $\frac{1}{x}$ olduğundan onu yokedmeye çalışalım.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{15}{x}}{(5 + \frac{3}{x})^2 - 25} &= \frac{\frac{15}{x}}{\frac{30}{x} + \frac{9}{x^2} - 25} \\ &= \frac{\frac{1}{x}(15)}{\frac{1}{x}(30 + \frac{9}{x})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15}{30 + \frac{9}{x}} &= \frac{15}{30 + \frac{9}{\infty}} = \frac{15}{30 + 0} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

TRİGONOMETRİK $\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ

Teorem: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir. x (radyan)

GENELLEME

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

Bu ifadeler çoğaltılabilir.

HATIRLATMA

Bazı durumlarda yarım açı bağıntılarını kullanmak gerekebilmektedir.

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \text{ ve} \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

Örnek...15:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} = ? \quad \frac{1}{5} //$$

Örnek...16:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{5x} &= ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5} \\ &= -\frac{2}{5} // \end{aligned}$$

Örnek...17:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin 3x} + \frac{2x}{\tan 3x} + \frac{3\sin 2x}{2\tan 6x} \right) &= ? \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{6} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} // \end{aligned}$$

Örnek...18:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2x + 5\tan x}{5x + \tan 4x + 2\tan 6x} &= \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \text{ pay ve payday } \frac{1}{x} \text{ ile çarpalım.} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{2x}{x} + \frac{5\tan x}{x}}{\frac{5x}{x} + \frac{\tan 4x}{x} + \frac{2\tan 6x}{x}} &= \frac{1+2+5}{5+4+2.6} \\ &= \frac{8}{21} // \end{aligned}$$

Örnek...19:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{\sin 4x}{x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \\ &= \frac{16}{2} = 8 // \end{aligned}$$

Örnek...20:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \tan 3x}{\sin^2 9x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 9x} \cdot \frac{\tan 3x}{\sin 9x} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{9} \\ &= \frac{1}{27} // \end{aligned}$$

Örnek...21:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x^2-16)}{2x-8} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x^2-16)}{2(x-4)} \cdot \frac{x+4}{x+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x^2-16)}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{2} = 1 \cdot \frac{4+4}{2} \\ &= 4 // \end{aligned}$$

Örnek...22:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin 99x}{\tan 2x + \tan 4x + \tan 6x + \dots + \tan 98x} &= \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \text{ pay ve payday } \frac{1}{x} \text{ ile çarpalım.} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \dots + \frac{\sin 99x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x} + \frac{\tan 4x}{x} + \dots + \frac{\tan 98x}{x}} &= \frac{1+3+\dots+99}{2+4+\dots+98} \\ &= \frac{50 \cdot 100}{49 \cdot 99} = \frac{50}{49} // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2n-1 &= 99 \\ 2n &= 100 \\ n &= 50 \\ 98 &= 2n \\ n &= 49 \end{aligned}$$

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

Örnek...23 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x} = ?$

Yarı açılı formlardan $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot 2 \sin 2x$$

$$= \frac{2}{1} \cdot 2 \cdot 0 = 0 //$$

Örnek...24 : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = ?$

$$\frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2 //$$

Örnek...25 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{|x|} = ?$

$$\frac{\sqrt{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}}{|x|} = \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{|x|} = \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} //$$

Örnek...26 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin \sqrt{x}} = ?$ pay ve paydağı $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ile çarpalım.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sin \sqrt{x}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{x}}}{\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1 //$$

Örnek...27 : $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{x - \pi} = ?$

$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ den

$$\frac{\sin(\pi - x)}{-(\pi - x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} - \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = -1 //$$

Örnek...28 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5\pi x}{5x^2} = ?$

$\cos 5\pi x = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right)$

$$\frac{1 - (1 - 2 \sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right))}{5x^2} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right)}{5x^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{5} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right)}{x^2} \cdot \left(\frac{\frac{5\pi}{2}}{\frac{5\pi}{2}} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5\pi}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{5\pi x}{2} \right)}{\left(\frac{5\pi x}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{25\pi^2}{4} \cdot 1^2 = \frac{5\pi^2}{2} //$$

Örnek...29 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos \frac{x}{2}} = ?$

$$\frac{1 - (2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1)}{1 - \cos \frac{x}{2}} = \frac{2 - 2 \cos^2 \frac{x}{2}}{1 - \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2(1 - \cos^2 \frac{x}{2})}{1 - \cos \frac{x}{2}} = \frac{2(1 - \cos \frac{x}{2})(1 + \cos \frac{x}{2})}{1 - \cos \frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2(1 + \cos \frac{x}{2}) = 2(1 + \cos \frac{0}{2}) = 2(1 + 1) = 4 //$$

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

DEĞERLENDİRME - 1

1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4} = ?$ $\frac{2 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 6}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}$

$2x^2 - 7x + 6$
 $2x^2 - 3x - 4x + 6$
 $x \rightarrow -2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 + 2} = \frac{1}{4} //$

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{8}{7}} \frac{49x^2 - 64}{6x^5 - 3x^3 - 8x + 9} = ?$ $\frac{49 \cdot \frac{64}{49} - 64}{6 \cdot \frac{8^5}{7^5} - 3 \cdot \frac{8^3}{7^3} - 8 \cdot \frac{8}{7} + 9}$
 $= \frac{0}{\text{Bir sayı}} = 0 //$

Not payda bir sayı sıfırdır,
 $\frac{8}{7}$ yaklaşık 1,1 olan bir sayıdır.

pozitif olan $6x^5 + 9$ toplamı > 15
negatif olan $-3x^3 - 8x$ toplamı yaklaşık
-11 veya -12 civerindedir.
sonuç pozitifdir.

3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 8x + 15} = ?$ $\frac{3^3 - 27}{9 - 24 + 15} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x-5)}$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+3x+9}{x-5} = \frac{9+9+9}{-2} = -\frac{27}{2} //$

4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{12+x} - 4}{x-4} = ?$ $\frac{\sqrt{12+x} + 4}{\sqrt{12+x} + 4}$
 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{12+x+16}{(x-4)(\sqrt{12+x} + 4)}$
 $= \frac{1}{\sqrt{12+4} + 4} = \frac{1}{8} //$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = ?$ $\frac{\sqrt{3+x} + 2}{\sqrt{3+x} + 2}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3+x-4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{3+x}+2)}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{3+x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{3+x}+2)}$

6) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + 3x + 2}{x+2} = k \in \mathbb{R}$ ise $a+k=?$ $\frac{0}{0}$ olmalıdır bir reel sayı olsun limit.

$x \rightarrow -2$ $a(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$
 $4a - 6 + 2 = 0$
 $4a = -4$
 $a = -1$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + 3x + 2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(-x+1)}{x+2}$

$= -(-2) + 1 = 3 //$

HATA
Burada -4 yok

7) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5-4}{x^2+mx+1} = r \neq 0$ ise $m=?$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2+mx+1} = r$

$x \rightarrow 5$ $25+m \cdot 5+1=0$
 $5m = -26$
 $m = -\frac{26}{5}$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)}{x^2 - \frac{26}{5}x + 1}$

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{5x^2 - 26x + 5}$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği olmalı ki
sonra değer bir reel
sayısı olsun.

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot 5}{(x-5)(5x-1)}$
 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{5x-1} = \frac{5}{5 \cdot 5 - 1}$
 $= \frac{5}{24} //$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} = ?$ $-1 \leq \sin x \leq 1$
 $-1 \leq \sin^3 x \leq 1$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \frac{-1 \text{ ve } 1 \text{ arasında bir sayı}}{\infty} = 0$

$5x^2 - 26x + 5$

$5x^2 - 26x + 5$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{3+x} + 2} = \frac{1+1}{\sqrt{4}+2}$
 $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} //$

LİMİT - 5

($\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİ)

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^9 \sin(kx)}{2x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(0x) + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin 9x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(0x)}{2x} + \frac{\sin x}{2x} + \frac{\sin 2x}{2x} + \dots + \frac{\sin 9x}{2x} \right)$$

$$= \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{9}{2}$$

$$= \frac{9 \cdot 10}{2} = \frac{45}{2} //$$

$$\left(\frac{0}{0} \right) 10) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin \sqrt{x}} = ? \quad 2 \cdot 1 = 2 //$$

$$\left(\frac{0}{0} \right) 11) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin \sqrt{8x}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin \sqrt{8x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{\sin 2x}{8x}}}{\frac{\sin \sqrt{8x}}{\sqrt{8x}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{2}{8}}}{1} = \frac{1}{2} //$$

$$\left(\frac{0}{0} \right) 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2 \cdot \tan 6x}{\sin^3 4x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(8 \cdot \frac{x}{\sin 4x} \cdot \frac{x}{\sin 4x} \cdot \frac{\tan 6x}{\sin 4x} \right)$$

$$8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} //$$

★

$$13) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\tan(x^3 - 64)}{\sin(2x - 8)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\tan(x^3 - 64)}{\sin(2x - 8)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{2} \cdot \tan(x^3 - 64)}{\frac{1}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{\sin(2x - 8)}{2(x - 4)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 1}{\frac{1}{4^2 + 4 \cdot 4 + 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{96} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{96}{1}$$

$$= 48 //$$

$\left(\frac{0}{0} \right)$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} = ? \quad \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 2x}{x}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} //$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x| + |\cos x|}{\sin x \cos x} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\cos x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + 1) = 0$$

LİMİT YOK.