

LİMİT - 4

(TRİGONOMETRİK LİMİTLER)

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 4

TRİGONOMETRİK LİMİTLER

$y = \sin x$ ve $y = \cos x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlıdır dolayısıyla

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a, \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$y = \tan x$ ve $y = \cot x$ fonksiyonları tüm reel sayılarda tanımlı değildir. Tanımlı olduğu her nokta için

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a, \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

Tanımlı olmadığı noktalarda gerekirse sağ ve sol limitlere bakılmalıdır.

Örnek...1 :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = ? \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 //$$

Örnek...2 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} &= ? \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} // \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \tan^3 x}{\sec^2 x} &= ? \\ &= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} - \tan^3 \frac{\pi}{4}}{\sec^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - (1)^3}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{4} - 1}{\frac{2}{4}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ &= -1 // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cot 120 &= -\cot 60 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 120 &= \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120 &= -\cos 60 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

Örnek...4 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos x} &= ? = \frac{(\cot 120)^2 - (\sin 120)^2}{\cos 120} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{5}{12}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-5}{12} \cdot \frac{2}{1} \\ &= \frac{-5}{6} // \end{aligned}$$

Örnek...5 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\csc x}{\tan x} &= ? \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{0}{1} = 0 // \end{aligned}$$

Örnek...6 :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{|\cos x|} = ? \quad \frac{\cos x}{-\cos x} = -1 //$$

Örnek...7 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x &= ? \\ -1 \leq \sin x \leq 1 &\text{ aralığındadır.} \\ x \rightarrow \infty &\text{ iken } \sin x \\ &\text{ herhangi bir sayıya} \\ &\text{ yaklaşıyor.} \\ &\text{ Limit yok.} // \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} &= ? \\ -1 \leq \sin x \leq 1 &\text{ olduğundan} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} &= \frac{A}{\infty} \text{ olur.} \\ &= 0 // \end{aligned}$$

LİMİT - 4

(TRİGONOMETRİK LİMİTLER)

DEĞERLENDİRME

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{2}{\pi}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin\left(\frac{3}{f(x)}\right) + \tan^2\left(\frac{\pi^2}{3} \cdot f(x)\right)}{\cos\left(\frac{2}{f(x)}\right)} = ?$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{3}{\frac{2}{\pi}}\right) + \tan^2\left(\frac{\pi^2}{3} \cdot \frac{2}{\pi}\right)}{\cos\left(\frac{2}{\frac{2}{\pi}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos(\pi)}$$

$$= \frac{\sin 270 + \tan^2 120}{\cos 180} = \frac{(-1) + (-\sqrt{3})^2}{(-1)} = \frac{-1 + 3}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 //$$

- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = ?$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x} = \frac{A}{\infty} \text{ şeklindedir.}$$
- $$= 0 //$$

- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right) = ?$
- $$= \sin\left(\frac{1}{\infty}\right) - \cos\left(\frac{1}{\infty}\right)$$
- $$= \sin 0^\circ - \cos 0^\circ$$
- $$= 0 - 1$$
- $$= -1 //$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{3 \sin^2 x}{\cos x} = ?$ $\frac{3 \cdot \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{3 \cdot 1^2}{0^-}$
- $$= \frac{3}{0^-}$$
- $$= -\infty //$$

- 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{cosec} x}{\tan x} = ?$ $\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$
- $$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1^2} = 0 //$$

- 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\tan x} = ?$ $\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{1} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$
- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2(0)}{\sin(0)} = \frac{1^2}{0^+}$$
- $$= \infty //$$

- 7) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos^3 x} = ?$ $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\left[\cos \frac{3\pi}{2}\right]^3} = \frac{-1}{(0^-)^3}$
- $$= \frac{-1}{0^-}$$
- $$= \infty //$$

NOT

0^+ ifadesi 0'a sağdan yaklaşmayı, yani çok küçük pozitif sayıları ifade etmektedir.
 0^- ifadesi 0'a soldan yaklaşmayı, yani çok küçük negatif sayıları ifade etmektedir.