

LİMİT – 3

(GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ – SONSUZ İÇİN LİMİTLER)

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 3

GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ

R gerçel sayılar kümesine $-\infty$ ve $+\infty$ un katılmasıyla elde edilen kümeye genişletilmiş gerçel sayılar kümesi denir. Genişletilmiş gerçel sayılar kümesi $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ kümesidir.

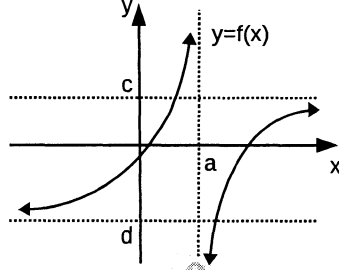
Şekilleri inceleyiniz.

a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$

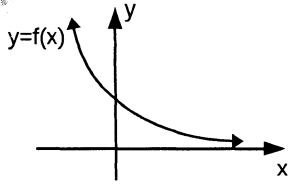
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d$



b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$



SONSUZLA İŞLEMLER

$a \in \mathbb{R}$ olmak koşuluyla

1) $a + \infty = \infty + a = \infty$ $a - \infty = -\infty + a = -\infty$

$a > 0$ $a \cdot \infty = \infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$

$a < 0$ $a \cdot \infty = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = \infty$

$a > 0$ $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{(-\infty)}{a} = -\infty$

$a < 0$ $\frac{\infty}{a} = -\infty$, $\frac{(-\infty)}{a} = \infty$

$a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

(sabit bir sayının çok büyük veya çok küçük bir sayıya bölümü sıfırdır.)

2) $\infty + \infty = \infty$ $-\infty - \infty = -\infty$
 $\infty \cdot \infty = \infty$ $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
 $(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$

3) $n \in \mathbb{Z}^+$
 $\infty^n = \infty$ $(-\infty)^{2n} = \infty$ $(-\infty)^{2n+1} = -\infty$
 $\frac{n}{\infty} = 0$ $\frac{2n+1}{\infty} = 0$

4) $n \in \mathbb{Z}^+$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^{2n} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^{2n+1} = \infty$

Polinomlarda sonsuz için limit alınırken en büyük dereceli terim belirleyici olur.

5) $a \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a}{0^+} = \infty$, $\frac{a}{0^-} = -\infty$
 $a \in \mathbb{R}^-$, $\frac{a}{0^+} = -\infty$, $\frac{a}{0^-} = \infty$

(sabit bir sayının 0 a çok yakın bir sayıya bölümü sonsuzdur)

6) $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$
 $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$
 $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$ değeri yoktur.

Örnek...1 :

$\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x-8} = ?$ $\frac{1}{0^+} = \infty //$

$x \rightarrow 8^+$, 8^+ den

$x-8 = 8,1-8$

$= 0,1$ gibi

sayılardır.

Yani 0^+

(sıfıra çok yakın

pozitif küçük sayılar)

LİMİT - 3

(GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ - SONSUZ İÇİN LİMİTLER)

Örnek...2 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = ?$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$
 Limit yok //

Örnek...3 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = ?$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty$
 Limit yok //

Örnek...4 : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x|}{x-2} = ?$ $\frac{|2|}{0^+} = \frac{2}{0^+} = \infty //$

Örnek...5 : $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{|x+6|}{x^2-36} = ?$ $\frac{|6+6|}{0^+} = \frac{12}{0^+} = \infty //$

Örnek...6 : $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2x}{x+3} = ?$ $\frac{-2 \cdot (-3)}{0^-} = \frac{6}{0^-} = -\infty //$
 $x \rightarrow -3^-$
 $x+3 = 0^-$

Örnek...7 : $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{-6x}{2x-5} = ?$ $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^+} \frac{-6 \cdot \frac{5}{2}}{0^+} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{-6 \cdot \frac{5}{2}}{0^-} = +\infty$
 Limit yok //

Örnek...8 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x+3} = ?$ $\frac{9}{\infty+3} = \frac{9}{\infty} = 0 //$

Örnek...9 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^x + 5^x + 4}{2} = ?$ $\frac{6^\infty + 5^\infty + 4}{2}$
 $= \frac{6^\infty + 5^\infty + 4}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty //$

Örnek...10 : $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{(x-2)^2} = ?$ $\frac{2+2}{(0^-)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty //$
 $x \rightarrow 2^-$
 $x-2 = 0^-$

Örnek...11 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{13}\right)^{x-12} = ?$ $\frac{7}{13} < 1$ basit kesir.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{basit kesir}) = 0$ 'a gider.
 $= 0 //$

Örnek...12 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{4}\right)^{x^2+1} = ?$ $\infty //$
 $x \rightarrow \infty$ den bileşik kesirlerin limiti ∞ 'a gider.

Örnek...13 : $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 - 5x + 2 = ?$ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$
 $= \infty^2 \left(3 - \frac{5}{\infty} + \frac{2}{\infty^2}\right)$
 $= \infty^2 (3 - 0 + 0)$
 $= \infty^2 \cdot 3 = \infty //$
 2.406
 Bu tür sorularda en büyük dereceli terime bakmak yeterlidir.
 $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 = \infty$

Örnek...14 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 6x^4 - 5x^3 + 3x - 12 = ?$ en büyük dereceli terime bakmak yeterlidir.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 6x^4 = 6 \cdot (-\infty)^4 = \infty //$

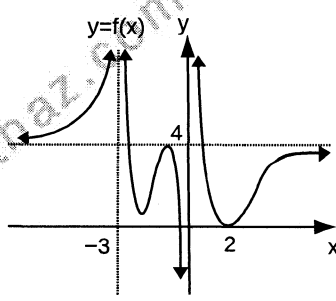
Örnek...15 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 12x^7 + 15x^3 + 1 = ?$ en büyük dereceli terime bakmak yeterlidir.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 12x^7 = 12 \cdot (-\infty)^7 = -\infty$

LİMİT – 3

(GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ – SONSUZ İÇİN LİMİTLER)

Örnek...16 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= ? & 4 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= ? & 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= ? & +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= ? & -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= ? & \infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= ? & 0\end{aligned}$$



UYARI

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , ∞^0 limit ifadeleri belirsizdir ve belirsizliğin giderilmesiyle hesaplanabilir. Bu ifadeler ayrı başlıklar olarak incelenecektir.

UYARI

Sonsuz bir sayı değil bir kavramdır. Sonsuzdan sayı gibi bahsetsek de çoğu zaman sayı gibi davranmadığını görmek sizi şaşırtmasın. Limit durumlarında sonsuza bölersem-çarparsam yerine çok büyük bir sayıya bölersem-çarparsam şeklinde düşünmelisiniz.

Sonsuzun sayı gibi davranmadığına bir örnek olarak aşağıdaki örneği inceleyiniz

$1+2+2^2+2^3+\dots$ ifadesini düşünün . Bu ifade açıkça üstten herhangi bir sayı tarafından sınırlandırılmaz ve sonsuza ıraksar (gider). Ama diyelim ki ifade x gibi bir sayı olsun

$x=1+2+2^2+2^3+\dots$ biraz düzenleme ile
 $x=1+2(1+2^2+2^3+\dots)=1+2x$ olarak yazılabilir ve son denklem $x=1+2x$ çözülürse $x=-1$ olarak bulunur ki bu da böyle bir sayı olmaması gerektiğini açıklar sanırsınız.

LİMİT - 3

(GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ - SONSUZ İÇİN LİMİTLER)

DEĞERLENDİRME

1) $\lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{-x}{x+7} = ?$ $\frac{-(-7)}{0^-} = \frac{7}{0^-} = -\infty //$
 $x \rightarrow -7^-$ iken
 $x+7 = 0^-$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7}{x-2} = ?$ $\frac{-7}{\infty-2} = \frac{-7}{\infty} = 0 //$

3) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x}{(x-7)^2} = ?$ $\frac{7}{(0^-)^2} = \frac{7}{0^+} = \infty //$

4) $\lim_{x \rightarrow 7^-} (x - (x-7)^2) = ?$ $\lim_{x \rightarrow 7^-} (x - (x^2 - 14x + 49))$
 $= \lim_{x \rightarrow 7^-} (-x^2 + 15x - 49) = -7^2 + 15 \cdot 7 - 49$
 $= -49 + 105 - 49 = 7 //$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 6^{\frac{x}{2}} - x^2 + 9^{\frac{4}{x}} = ?$
 $= 6^{\frac{0}{2}} - 0^2 + 9^{\frac{4}{0^-}}$
 $= 1 - 0 + 9^{-\infty} = 1 + \frac{1}{9^{\infty}}$
 $= 1 + \frac{1}{\infty} = 1 + 0 = 1 //$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} 9^{\frac{4}{x}} + 3 \cdot \frac{4}{x} = ?$
 $= 9^{\frac{4}{\infty}} + 3 \cdot \frac{4}{\infty} = 9^0 + 3 + \frac{4}{\infty} = 1 + 3 + 0$
 $= 4 //$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-3)^{\frac{7}{x} + 4} = ?$ $(-3)^{\frac{7}{\infty} + 4} = (-3)^{0+4}$
 $= (-3)^4 = 81 //$

8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 1} = ?$ $\sqrt{\infty} = \infty //$

9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 7x - 1)(3x^2 - 7x^3 + 1728) = ?$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-14x^5 + \dots) = -\infty //$

10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2}{x^2} + 1\right) - \ln\left(\frac{3x}{1+2x} + 1\right) = ?$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{2}{x^2} + 1\right) - \ln\left(\frac{3}{\frac{1}{x} + 2} + 1\right) \right]$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\ln\left(\frac{2}{x^2} + 1\right) - \ln\left(\frac{3}{\frac{1}{x} + 2} + 1\right) \right]$
 $= \ln\left(\frac{2}{\infty} + 1\right) - \ln\left(\frac{3}{\frac{1}{\infty} + 2} + 1\right)$
 $= \ln(1) - \ln\left(\frac{3}{2} + 1\right) = 0 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) //$

11) Grafiği verilen $y=f(x)$ için

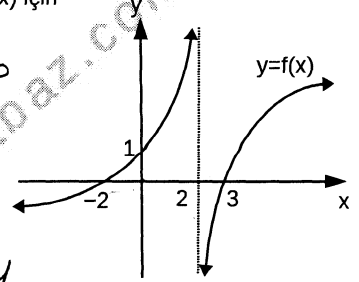
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$ ∞

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$ ∞

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$ 1

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$ 1

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$ ∞



12) Grafiği verilen $y=f(x)$ için

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = ?$ 4

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = ?$ $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = ?$ ∞

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$ ∞

$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = ?$ ∞

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$ ∞

