

LİMİT - 2

(PARÇALI FONKSİYON VE MUTLAK DEĞERİN LİMİTİ)

LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 2

ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTİ :

I. PARÇALI FONKSİYONUN LİMİTİ :

Limit alınacak nokta kritik nokta değilse önce dal seçilir, sonra normal limit işlemi uygulanır. Limit alınacak nokta kritik nokta ve istenen yön belirtilmemişse bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir.

Örnek...1 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 5 \\ x^2-26, & x > 5 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

2 kritik nokta
değil. 2 < 5

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ $2 \cdot 2 - 1 = 3 //$
 b) $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = ?$ $9^2 - 26 = 81 - 26 = 55 //$
 c) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ?$ $2 \cdot 5 - 1 = 9$
 d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ?$ $5^2 - 26 = -1$

değerlerini hesaplayınız.

Örnek...2 :

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < 2 \\ 2x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$ 2 kritik nokta. sağ ve sol limite bakılmalı.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 5 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 //$$

Örnek...3 :

$$f(x) = \begin{cases} e^x - \ln x, & x \geq 1 \\ x^2 + a, & x < 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun tüm reel sayılar için limiti varsa a kaçtır?

Kritik noktada limit var demek ki.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 1^2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= e^1 - \ln 1 \end{aligned} \right\} \text{ ise } \begin{aligned} 1^2 + a &= e^1 - \ln 1 \\ 1 + a &= e - 0 \\ a &= e - 1 // \end{aligned}$$

II. MUTLAK DEĞER FONKSİYONUN LİMİTİ:

Mutlak değer içeren fonksiyonun limiti alınmadan önce fonksiyonun aranan x değeri civarında kuralının ne olacağı bulunmalıdır. Limit alınacak nokta kritik nokta ise bu noktada sağ ve sol limit değerine bakılarak karar verilir

Örnek...4 :

$f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu için

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$ $|3^2 - 4| = 5 //$
 2) $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = ?$ $|6^2 - 4| = 32 //$
 3) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = ?$ $x \rightarrow -2^-$ iken $x^2 - 4 = 0^+ \text{ ise } |0^+| = 0 //$
 4) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = ?$ $x \rightarrow -2^+$ iken $x^2 - 4 = 0^- \text{ ise } |0^-| = 0 //$

Örnek...5 :

$f(x) = x \cdot |x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında limit var mıdır?

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot |x| &= x \cdot (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot |x| &= x \cdot x = 0 \end{aligned} \right\} \text{ limit var } = 0 //$$

Örnek...6 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} &= \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} &= \frac{x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{ limit yok.}$$

LİMİT - 2

(PARÇALI FONKSİYON VE MUTLAK DEĞERİN LİMİTİ)

DEĞERLENDİRME

1)

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & 0 < x < 1 \\ e^x & x \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e^1 = e$$

$e \neq 0$ limit yok //

2)

$$f(x) = \begin{cases} mx+n, & x < 0 \\ ax^2+bx+3n-2, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı
 için limite sahipse n kaçtır?

kritik noktada
 limit ver demektir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = m \cdot 0 + n = n$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + 3n - 2 = 3n - 2$$

$$\begin{aligned} n &= 3n - 2 \\ 2 &= 2n \\ n &= 1 \end{aligned} //$$

3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & x < 0 \\ x^2 - 4kx + m - k, & 0 \leq x < 3 \\ mx + 2, & x \geq 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için her reel sayı
 için limite sahipse (m,k) kaçtır?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{0}{0-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 - 4k \cdot 0 + m - k = m - k$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3^2 - 4k \cdot 3 + m - k = 9 - 13k + m$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = m \cdot 3 + 2 = 3m + 2$$

$$9 - 13k + m = 3m + 2$$

$$\begin{cases} 0 = m - k \\ m = k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 13/ \quad 2m + 13k &= 7 \\ m - k &= 0 \\ 15m &= 7 \\ m &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

$$7 = 2m + 13k \quad (m, k) = \left(\frac{7}{15}, \frac{7}{15}\right) //$$

4)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x, & x < 1 \\ x^2 + 3x - 4, & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 7, & x \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu kaç reel sayı değerinde
 limite sahip değildir?

f(x), parçalı
 fonksiyon olduğundan
 kritik noktalarda
 limit vardır.
 Kritik noktalara
 bakalım.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^3 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 7 = 9$$

Limit yok -

x=2 noktasında

Limit yok. //

5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} 5^{|x-2|} = ?$$

$$5^{|0-2|} = 5^{|-2|} = 5^2 = 25 //$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+1}{x+3} \right| = ?$$

$$\left| \frac{1+1}{1+3} \right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} //$$

7)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = ?$$

$$\frac{|0-4|}{2+2} = \frac{0}{4} = 0 //$$

$x \rightarrow 2$ için

$$x^2 - 4 = 0^-$$

8)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x^2-4|}{x+2} = ?$$

(Önce fonksiyonu tanımlayıp
 sonra limiti alınız)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \right| = \lim_{x \rightarrow -2^-} |x-2|$$

$$= |-2-2|$$

$$= |-4|$$

$$= 4 //$$