

## LİMİT - 1

( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

### LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 1

#### FONKSİYONLARIN LİMİTİ

##### SOLDAN YAKLAŞMA

$a \in \mathbb{R}$  olsun.  $a$  sayısına,  $a$  sayısından daha küçük değerler ile yaklaşıyorsak bunu  $x \rightarrow a^-$  ile belirtiriz.



Örneğin;  $x \rightarrow 5^-$  yazdığımızda sırasıyla  $x$  değerlerini 4.5 , 4.9 , 4.99 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada  $x$  sayısı 5 e çok yakın fakat 5 den küçük bir sayıdır.

##### SAĞDAN YAKLAŞMA

$a$  sayısına,  $a$  sayısından daha büyük değerler ile yaklaşıyorsak bunu  $x \rightarrow a^+$  ile belirtiriz.



Örneğin şekilde  $x \rightarrow 5^+$  yazmışsak sırasıyla  $x$  değerlerini 5.5 , 5.1 , 5.01 gibi değerler aldığını düşünürüz. Burada değerler  $x$  sayısına ne kadar yakın seçilirse  $x \rightarrow 5^+$  o kadar iyi temsil edilmiş sayılır.

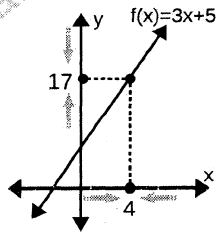
Örnek 1 :

Bir noktada sağdan ve soldan yaklaşımı bir örnekte inceleyelim.

$f(x)=3x+5$  fonksiyonu için  $x$  değişkeninin 4 sayısına yaklaşıırken aldığı değerler tabloda verilmiştir.

| $f(x)=3x+5$       |      |       |    |                  |      |      |
|-------------------|------|-------|----|------------------|------|------|
| $4^- \rightarrow$ |      |       | 4  | $\leftarrow 4^+$ |      |      |
| 3,8               | 3,9  | 3,99  |    | 4,01             | 4,1  | 4,2  |
| 16,4              | 16,7 | 16,97 | 17 | 17,03            | 17,3 | 17,6 |

$x$  değişkeni 4 e yaklaşıırken  $y=3x+5$  değeri 17 sayısına yaklaşmaktadır.

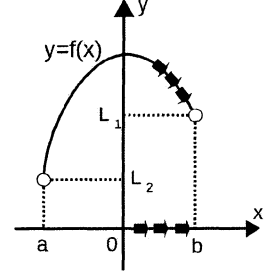


#### SOLDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

$f$ ,  $(a,b)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f(x)$  fonksiyonu,  $x$  değişkeni  $b$  ye bu aralıktan yaklaşıırken  $L_1$  görüntü değerine yaklaşıyorsa  $f$  fonksiyonun  $b$  noktasında soldan limiti  $L_1$  dir denir ve  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)=L_1$  ile belirtilir.

Şekli inceleyiniz.

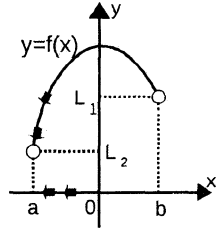
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)=L_1$$



#### SAĞDAN LİMİTİN SEZGİSEL TANIMI

$f$ ,  $(a,b)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.  $f(x)$  fonksiyonu,  $x$  değişkeni  $a$  sayısına bu aralıktan sağı değerleri alarak yaklaşıırken görüntü olarak  $L_2$  değerine yaklaşıyorsa  $f$  fonksiyonun  $a$  noktasında sağdan limitine  $L_2$  dir denir.

$a$  noktasındaki sağdan limit sembolik olarak  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)=L_2$  ile belirtilir.



#### UYARI:

İki limit tanımında da limitlerinden bahsedilirken fonksiyonun bu noktada tanımlı olması gerektiğinden bahsedilmiyor!

#### SONUÇ

Bir fonksiyonun bir  $c$  noktasında sağdan limiti  $L_1$ , soldan limit değeri  $L_2$  ve

$$L_1=L_2=L$$

ise fonksiyonun  $c$  noktasında limiti vardır ve  $L$  dir denir. Sembolik olarak bunu  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)=L$  ile ifade ederiz.

## LİMİT - 1

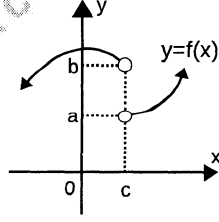
( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

Aşağıda verilen 3 örneği inceleyiniz.

### Örnek...2 :

$x=c$  noktasında  
sol limit  $b$  ve  
sağ limit  $a$   
olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

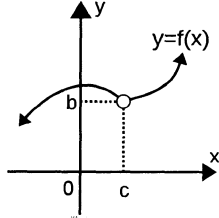


### Örnek...3 :

$x=c$  noktasında  
sol limit  $b$  ve sağ limit  $b$   
olduğundan  $x=c$  için limit  $b$   
dir.  
Burada  $x=c$  için  
fonksiyonun tanımsız  
olması limiti olmasına  
engel değildir.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = b$$

dolayısıyla  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$  olur.



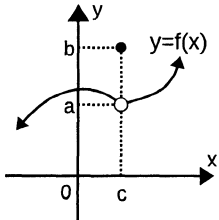
### Örnek...4 :

$x=c$  noktasında  
sol limit  $a$  ve  
sağ limit  $a$  olduğundan  
 $x=c$  için limit  $a$  dir.

Uyarı

$x=c$  için fonksiyon görüntüsünün ,limitle eşit  
olmaması bu noktada fonksiyonun limiti  
olmasına engel değildir.

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = a$$

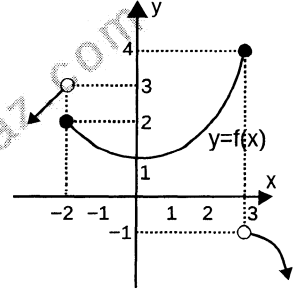


Limit değerini ve aynı noktadaki görüntü  
değeri arası ilişki fonksiyonların sürekliliği  
başlığında incelenecektir.

### Örnek...5 :

Yanda grafiği verilen  
fonksiyon için  
istenen limitleri  
bulunuz.

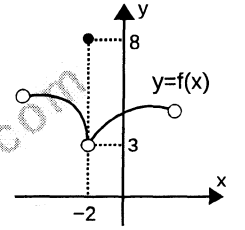
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= ? \quad (3) \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= ? \quad (2) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= ? \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= ? \quad (-1) \end{aligned}$$



### Örnek...6 :

Yanda grafiği verilen  
fonksiyon için istenen  
limitleri bulunuz?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= ? \quad (3) \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= ? \quad (3) \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= ? \quad (3) \\ f(2) &= ? \quad (8) \end{aligned}$$



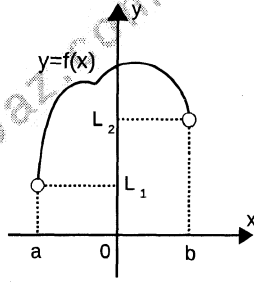
## LİMİT - 1

( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

### UYARI

Bir  $f(x)$  fonksiyonu  $(a,b)$  aralığında tanımlanmış olsun  $f(x)$  fonksiyonunun  $x=a$  noktasındaki sağ limiti fonksiyonun  $a$  noktasındaki limitidir.  $x=a$  noktasının sol tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan sol

limite bakmaya gerek yoktur. Ayrıca  $x=b$  noktasındaki sol limit fonksiyonun  $b$  noktasındaki limitidir.  $x=b$ 'nin sağ tarafında fonksiyon tanımsız olduğundan  $b$  noktasında sağ limite bakılmaz. Şekli inceleyiniz.



### Örnek...7 :

Grafiğe göre istenen

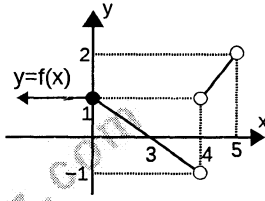
limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ? \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = ? \quad (-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = ? \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = ? \quad (2) \text{ (sadece sol limite bakıldı)}$$



### Örnek...8 :

Grafiğe göre istenen

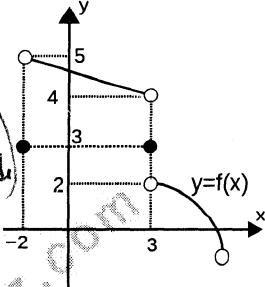
limitleri bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = ? \quad (5) \text{ (sadece sağ limite bakıldı)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = ? \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = ? \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ? \quad \text{Yok} \text{ (sol limit sağ limite eşit değil.)}$$



### LİMİT ALMA KURALLARI :

#### TEOREM 1

$f$  polinom fonksiyon veya  $x=a$  noktası  $f$  fonksiyonun kritik noktası değilse (rasyonel fonksiyonlar için paydanın köklerinden biri, parçalı fonksiyonlar için sınır noktaları, mutlak değer veya logaritma fonksiyonunun içini 0 yapan değerler)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ olur.}$$

Örnek...9 : (2'yi yerine koyarız)

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = ? = 2^3 = 8 //$$

#### Örnek...10 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 + x + \ln(x-3) &= ? \quad (4'ı yerine koyarız) \\ &= 4^2 + 4 + \ln(4-3) \\ &= 16 + 4 + \ln 1 \\ &= 20 + 0 \\ &= 20 // \end{aligned}$$

#### TEOREM 2

$L, M, c$  ve  $k$  birer reel sayı ve  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \text{ olsun.}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \text{ çarpma kuralı}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k \cdot L$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} c^{f(x)} = c^L$$

$$8) \lim_{x \rightarrow a} \log f(x) = \log(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = \log(L), \log L \in \mathbb{R}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{ ve } f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \text{ olur.}$$

## LİMİT - 1

( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

### NOT

Limit hesapları yapılmadan varsa önceden sadeleştirmeler yapılmalıdır.

Örnek...11 : polinom olduğundan yerine konur.

$$\lim_{x \rightarrow 1} 5x^2 = ? = 5 \cdot 1^2 = 5 //$$

polinom olduğundan yerine konur.

Örnek...12 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 - 7x^2 + 12x + 21) &= ? \\ &= 3 \cdot 0^3 - 7 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 21 \\ &= 21 // \end{aligned}$$

Örnek...13 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 5x + 13) &= ? \quad \text{polinom olduğundan yerine konur.} \\ &= 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 13 \\ &= 36 - 15 + 13 \\ &= 34 // \end{aligned}$$

Örnek...14 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + x^2 - 4x + 3) &= ? \quad \text{polinom olduğundan yerine konur.} \\ &= 5 \cdot 2^2 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 \\ &= 20 + 4 - 8 + 3 \\ &= 27 // \end{aligned}$$

Örnek...15 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^4 + x^2 + 1)}{(x - 3)} &= ? \quad \text{yerine koyalım.} \\ &= \frac{2^4 + 2^2 + 1}{2 - 3} = \frac{16 + 4 + 1}{-1} \\ &= -21 // \end{aligned}$$

Örnek...16 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{3} - 3)}{|x - x^2 + 1|} &= ? \quad \text{yerine koyalım.} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 3}{|4 - 4^2 + 1|} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 3}{|-11|} = \frac{\sqrt{3} - 3}{11} // \end{aligned}$$

Örnek...17 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2 - \sqrt{x} + 22})}{\sqrt{2x + 17}} &= ? \quad \text{yerine koyalım.} \\ &= \frac{\sqrt{4^2 - \sqrt{4} + 22}}{\sqrt{2 \cdot 4 + 17}} \\ &= \frac{\sqrt{16 - 2 + 22}}{\sqrt{25}} \\ &= \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} // \end{aligned}$$

Örnek...18 :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 2 \quad \text{ise}$$

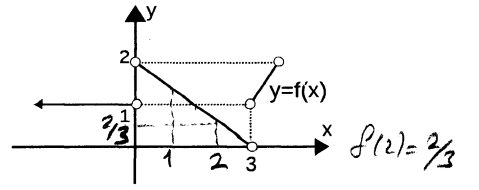
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left( f(x) \cdot g(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= ? \quad \text{Limiti ayrı ayrı dağıtabiliriz.} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] - \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = 5 \cdot 2 - \frac{5}{2} \\ &= \frac{20 - 5}{2} = \frac{15}{2} // \end{aligned}$$

Örnek...19 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2}{x^7} \right) &= ? \quad \text{yerine koyalım.} \\ &= \frac{1^5 + 4 \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1^2}{1^7} \\ &= \frac{1 + 4 + 2 - 1}{1} = \frac{6}{1} = 6 // \end{aligned}$$

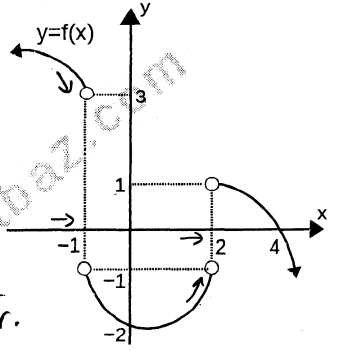
Örnek...20 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(5 - x) &= ? \\ \text{yerine koyarsak} \quad x \rightarrow 2^+ \text{ iken} \quad 5 - x &\rightarrow 2^- \text{ olur.} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(5 - x) &= f(2^-) = \frac{2}{3} // \end{aligned}$$



Örnek...21 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(f(x)) &= ? \\ \text{x giderken 2'ye soldan} \quad \text{görsenti de} \quad \text{artarak -1'e gider.} \quad \text{yani -1^- olur.} \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3 //$$

x giderken -1'e soldan görsenti de artarak 3'e gider. dolayısıyla cevap 3 olur. //

# LİMİT - 1

( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

## DEĞERLENDİRME

1)  $\lim_{x \rightarrow a^2} \left( \frac{13}{1+x} \right) = \frac{1}{2}$  ise  $a > 0$  sayısı kaçtır?

yerine koyalım.

$$\frac{13}{1+a^2} = \frac{1}{2}$$

$$1+a^2 = 26$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5 \text{ (pozitif isteniyor)} //$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + ax + 5) = 0$  ise  $a$  sayısı kaçtır?

yerine koyalım.

$$2 \cdot 1^3 + a \cdot 1 + 5 = 0$$

$$2 + a + 5 = 0$$

$$a = -7 //$$

3)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(3^x + 4^x)}{5^x} \right) = ?$

yerine koyalım.

$$\frac{3^2 + 4^2}{5^2} = \frac{9 + 16}{25} = \frac{25}{25} = 1 //$$

4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \log(x-3) &= \log \left[ \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \right] \\ &= \log [2-3] \\ &= \log(-1) \end{aligned}$$

tanımlı değil.  
limit yok.

5)  $\lim_{x \rightarrow 4} \ln(x-3) = ?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} [\ln(x-3)] &= \ln \left[ \lim_{x \rightarrow 4} (x-3) \right] \\ &= \ln [4-3] \\ &= \ln 1 = 0 // \end{aligned}$$

6)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ve

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x) - 3f(x) + 2) = 0 \text{ ise}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \text{ kaç olabilir?}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) - \lim_{x \rightarrow a} 3f(x) + \lim_{x \rightarrow a} 2 = 0$$

$$L \cdot L - 3L + 2 = 0$$

$$L^2 - 3L + 2 = 0$$

$$(L-2)(L-1) = 0 \Rightarrow L = 2 \text{ veya } L = 1$$

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^{70} - 2x^{69} + 3x^2 + 4) = ?$

yerine koyalım.

$$= 2^{70} - 2 \cdot 2^{69} + 3 \cdot 2^2 + 4$$

$$= 2^{70} - 2^{70} + 3 \cdot 4 + 4$$

$$= 12 + 4 = 16 //$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 2 + 2 = 4$$

veya  $1 + 1 = 2$  olabilir.

8)  $\lim_{x \rightarrow 5} \left( \frac{x-5}{x^2+25} \right) = ?$

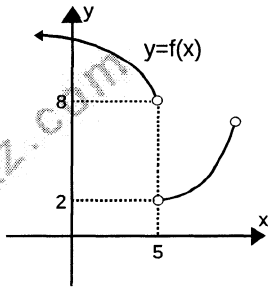
yerine koyalım.

$$\frac{5-5}{5^2+25} = \frac{0}{50} = 0 //$$

9)

a)  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = ? = 8$

b)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = ? = 2$



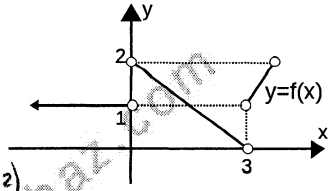
## LİMİT - 1

( LİMİT TANIMI - SÜREKLİLİK )

10)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = ?$$

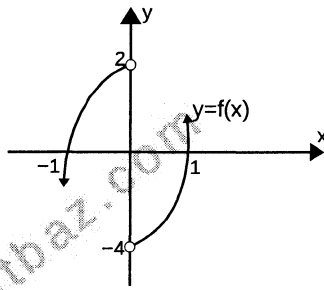
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) &= f((0^-)^2) \\ &= f(0^+) \\ &= 1 // \end{aligned}$$



11)

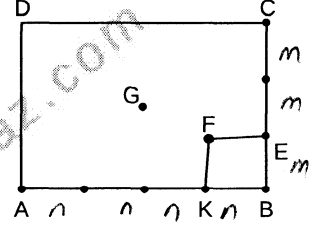
$$\frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3)} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2)}{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3)} &= \frac{f((0^+)^2)}{f((0^-)^3)} \\ &= \frac{f(0^+)}{f(0^-)} = \frac{-4}{2} = -2 // \end{aligned}$$



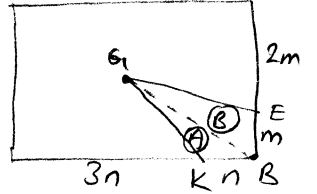
13)

ABCD bir dikdörtgen ve G noktası bu dikdörtgenin ağırlık merkezi olsun. F ABCD iç bölgesinde bir noktadır.



$$|BE| = \frac{|BC|}{3} \quad |BK| = \frac{|BA|}{4} \text{ ise}$$

$$\lim_{F \rightarrow G} \left( \frac{A(ABCD)}{A(BEFK)} \right) = ?$$



$$A(ABCD) = 4n \cdot 3m = 12mn$$

$$\text{A) alanı} = \frac{n \cdot \frac{3m}{2}}{2} = \frac{3mn}{4}$$

$$\text{B) alanı} = \frac{n \cdot \frac{4n}{2}}{2} = m \cdot n$$

$$\begin{aligned} \lim_{F \rightarrow G} \frac{A(ABCD)}{A(BEFK)} &= \frac{12mn}{\frac{3mn}{4} + mn} = \frac{12mn}{\frac{7mn}{4}} \\ &= \frac{12mn}{1} \cdot \frac{4}{7mn} \\ &= \frac{48}{7} // \end{aligned}$$

**HATA!**  $\lim_{x \rightarrow 1^+}$  olmalı.

12)

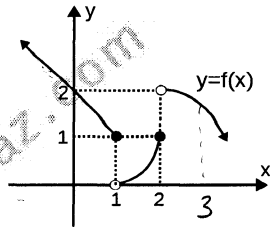
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f \circ f \circ f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) =$$

x giderken 1'e sağdan  
limit  $f(x)$  olarak sıfır olur.  
yani 0+ olur.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$$

x giderken 0'a sağdan  
limit  $f(x)$  olarak 2 olur.



Yani 2-  
olur.

12. Sınıf Matematik Konu Anlatımı 2014-2015

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \text{ olur.} //$$