LİMİT SÜREKLİLİK BÖLÜM 10

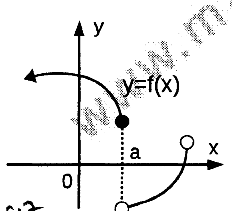
FONKSİYONLARDA SÜREKLİLİK

BİR NOKTADA SÜREKLİLİK

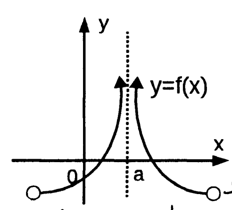
$f: A \subset R$ olmak üzere $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun.
$a \in A$ olmak üzere, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ oluyorsa f fonksiyonu a noktasında süreklidir denir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyona o noktada süreksiz bir fonksiyon denir.

Tanıma göre f a da sürekli ise:
1) f fonksiyonu a da tanımlı,
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ var ve
3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
koşullarının üçü de gerçekleşmelidir.

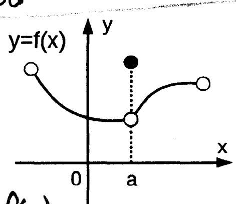
Örnek...1 :
Grafiği aşağıdaki gibi olan fonksiyonlar x=a noktasında sürekli midir?



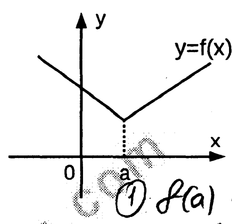
süreksiz
$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$



süreksiz.
f(x), a'da tanımlı değil.



Süreksiz
$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$



① f(a) tanımlı
② $\lim f(a)$ var
③ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
sürekli

Örnek...2 :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a ; & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-4} ; & x<3 \end{cases}$$

fonksiyonu x=3 noktasında sürekli ise a kaçtır?

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$

$\frac{3^2-3}{3^2-4} = 3^2+a$

$\frac{6}{5} = 9+a$

$a = \frac{6}{5} - 9$

$a = -\frac{39}{5}$

Örnek...3 :

$$f(x)=\begin{cases} a.e^x ; & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} ; & x \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu x=0 noktasında sürekli ise a kaçtır?

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$

$1 = 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$1 = a.e^0$

$1 = a.1$

$a = 1$

Örnek...4 :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{41}}{x^3-x}$

fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?

paydayı sıfır yapan kritik noktalarda f(x) tanımlı olmadığı için süreksizdir.

$x^3 - x = x(x^2-1)$

$= x(x-1)(x+1)$

$= \{0, -1, 1\}$ de süreksiz.

TANIM KÜMESİNDE SÜREKLİLİK

$A \subset R$ ve $f: A \to R$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için f fonksiyonu sürekli ise f tanım kümesinde sürekli bir fonksiyondur denir. Örneğin polinom fonksiyonlar tanım kümesinde sürekli olan fonksiyonlardandır.

SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

1. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$ ise f soldan sürekli

2. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ise f sağdan süreklidir denir.

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için sağdan ve soldan sürekli olması gerekir.

HATA a-b yerine a-5b sorulmalıydı.

Örnek...5 :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & x<5 \\ ax+4 & x=5 \\ (b-3)x+4a & x>5 \end{cases}$$

fonksiyonu 5 noktasında sağdan sürekli ise a–b kaçtır?

5 noktasında sağdan sürekli ise
$\lim_{x\to 5^+} f(x) = f(5)$ olmalı

$(b-3).5+4a = 5a+4$

$5b-15+4a = 5a+4$

$5b - a = 19$

NOT Bu verilerle a-b bulunamaz. Fonk tüm noktalarda sürekli deseydi sol limit yardımıyla a'yı ve b'yi bulurduk.

SÜREKSİZLİK

$I \subset R$ ve $f: I \to R$ fonksiyonu $a \in R$ olmak üzere x=a noktasında sürekli değil ise f fonksiyonu x=a noktasında süreksizdir denir.

BAZI FONKSİYONLARIN SÜREKSİZ OLDUĞU NOKTALARI BULMA

1. **Rasyonel Fonksiyonlar :** f(x)=P(x)/Q(x) ve P(x) ve Q(x) polinom fonksiyonlar ise Q(x)=0 olduğu noktalarda f de tanımsız olacağından bu noktalarda fonksiyon süreksizdir.

Örnek...6 :

$f(x)=\dfrac{5x-3}{x^2-5x+6}$ fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

x=3 ve x=2 noktalarında süreksizdir.

2. **İrrasyonel Fonksiyonlar:** $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$ fonksiyonu $g(x)\geq 0$ için süreklidir.

Örnek...7 :

$f(x)=\sqrt[12]{2x-3}$ ve $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2-x^4}$ fonksiyonları hangi noktalarda süreklidir?

$x^2-x^4=0$

$x^2(1-x^2)=0$

$x^2(1-x).(1+x)=0$

x=0, x=1, x=-1 'de süreksiz.

$2x-3\geq 0$

$2x\geq 3$

$x\geq \frac{3}{2}$

İkisinin de sürekli olduğu aralık $[3/2,\infty)$//

3. **Parçalı Fonksiyonlar** :Dalları oluşturan fonksiyonlarla beraber kritik noktalarda (yani fonksiyonun kural değiştirdiği noktalarda) süreklilik olup olmadığı araştırılmalıdır.

Örnek...8 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} ; & x<0\\ \ln(x+1) ; & x=0\\ \dfrac{x}{x^2-1} ; & x>0\end{cases}$$

kaç noktada süreksizdir?

x<0 için sürekli

x>0 bölgesinde x=1 için süreksiz

NOT (x=-1 tanım kümesinde olmadığından alınmadı)

sıfır noktasını kontrol edelim

$f(0)=\ln(0+1)=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{-1}=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$

sıfır noktasında da süreksiz//

cvp=2 noktada süreksiz

Örnek...9 :

Fonksiyonların sürekli oldukları aralıkları yazınız?

a) $f(x)=3x^2-5x+2$

polinom fonk. R'de sürekli

b) $h(x)=\dfrac{\sin x}{2-\cos x}$

$2-\cos x=0$ $\cos x=2$ böyle bir x yok.

Tüm R'de süreklidir.

c) $u(x)=\sqrt{x^2-x-12}$

karekökli ifade olduğundan $x^2-x-12\geq 0$ 'da sürekli

$(x-4)(x+3)=0$

-3 4

+ – +

$(-\infty,-3]\cup[4,\infty)$ aralığında sürekli

d) $v(x)=\sqrt[3]{x-12}$

3. dereceden kök tüm reel sayılarda süreklidir.

e) $$t(x)=\begin{cases}x^2-x ; & x\leq 0\\ \dfrac{x^2-x}{x^2-4} ; & x>0\end{cases}$$

x<0 olan her yerde süreklidir.

paydayı sıfır yapan x=-2 ve x=2'de süreksizdir. -2, zaten tanım bölgesinde yok, alınmaz.

sıfır noktası için

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\frac{0}{-4}=0$

$f(0)=0$

0'noktasında sürekli

cevap sadece 2 noktasında süreksiz

polinom fonksiyon

Örnek...10 :

$$t(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} ; & x\neq 3\\ \dfrac{m.\cos(x-3)}{x^2+9} ; & x=3\end{cases}$$

fonksiyonu reel sayılarda sürekli ise m değeri kaçtır?

$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$ olmalı.

$\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}=x+3$

$3+3=\dfrac{m.\cos(3-3)}{3^2+9}$

$6=\dfrac{m.1}{18}$

m=108//

BİR NOKTADA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

$A\subset R$ olmak üzere f:A → R ve g:A → R $x=a\in A$ da sürekli iki fonksiyon ise f ± g , f.g , f/g ve k.f $(k\in R)$ fonksiyonları da sürekli olur.

KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

f:[a,b] → R tanım kümesinde sürekli bir fonksiyon ise

1) f fonksiyonu bu aralıkta sınırlıdır. Yani $\forall x\in R$ için $|f(x)|<B$ olacak şekilde $B\in R$ vardır.

2) f fonksiyonu [a,b] aralığında maksimum ve minimum değerlerine sahiptir.

3) $a<x_1<x_2<b$ için $f(x_1)\neq f(x_2)$ ise $\exists\ c\in(x_1,x_2)$ öyle ki $f(c)\in((f(x_1),f(x_2))$

Örnek...11 :

f:[−2,1] → R $f(x)=x^2+3x$ fonksiyonu x eksenini keser mi?

$f(-2)=(-2)^2+3.(-2)=4-6=-2$

$f(1)=1^2+3.1=4$

x, [-2,1] aralığında -2'den 1'e doğru ilerlerken görüntüler -2'den 4'e doğru değişiyorsa bir yerde x'i kesip sıfır değerini alıyordur.//

(FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ)

Kök içi negatif ve paydayı sıfır yapan değerlerde tanımsız yani süreksizdir.

DEĞERLENDİRME

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4x-12}{x^2}}$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

$\dfrac{x^2-4x-12}{x^2} \geq 0$

$\dfrac{(x-6)(x+2)}{x^2} \geq 0$

6, −2, 0 çifte

−2	0	6
+	−	−	+

süreksiz x değerleri

$(-2,6)-\{0\}$ //

2) $f(x)=\sqrt{9-|4x-12|}$

fonksiyonunu sürekli yapan x değerleri nedir?

$0 \leq 9-|4x-12|$

$|4x-12| \leq 9$

$-9 \leq 4x-12 \leq 9$

$-9+12 \leq 4x-12+12 \leq 9+12$

$3 \leq 4x \leq 21$

$\dfrac{3}{4} \leq x \leq \dfrac{21}{4}$

sürekli yapan değerler $\left[\dfrac{3}{4}, \dfrac{21}{4}\right]$ aralığıdır.

3) $v(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-1}}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

Üçüncü dereceden kök'te iç negatif olabilir.

Sadece payda sıfır olmamalıdır.

$x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=-1$ veya $+1$

sürekli olduğu aralık $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ //

4) $g(x)=\log_{x-2}(\ln x)$

fonksiyonunun sürekli olduğu en büyük küme nedir?

Logaritmanın tanım aralığı

① $x-2 \neq 1$
$x \neq 3$

② $x-2>0$
$x>2$

③ $\ln x>0$ olmalı. (ln x logaritma olduğundan 0'da ayrıca incelenmeli)

$\ln x>0$
$\ln x>\ln 1$
$x>1$

5) $f(x)=2^{\frac{x^2}{x^3-5}}$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerleri nedir?

üstel fonksiyon her yerde süreklidir.

üss= $\dfrac{x^2}{x^3-5}$ ifadesinde $x^3-5=0$ yapan değerde süreksizdir.

$x^3=5$

$x=\sqrt[3]{5}$ //

6) $f(x)=\begin{cases} x^2-a\ ; & x<3 \\ ax+b\ ; & x=3 \\ bx+2\ ; & x>3 \end{cases}$

sürekli bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

$f(3)=3a+b$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=3^2-a=9-a$

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=b.3+2=3b+2$

sürekli fonksiyonsa kritik noktalarda da süreklidir.

$9-a=3a+b=3b+2$

$9-a=3a+b$ $\quad$ $3a+b=3b+2$

$9=4a+b$ $\quad$ $3a-2b=2$

$2/\ 4a+b=9$
$3a-2b=2$

$8a+\cancel{2b}=18$
$+\ 3a-\cancel{2b}=2$

$11a=20$

$a=\dfrac{20}{11}$

$b=\dfrac{19}{11}$

7) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a}{x^2-7}\ ; & x<3 \\ \dfrac{ax}{x+2}\ ; & x=3 \\ bx-2\ ; & x>3 \end{cases}$

fonksiyonu tam olarak 2 noktada süreksiz bir fonksiyonsa a ve b yi bulunuz?

$x<3$ dalında $x^2-7=0$ noktalarında tanımsız (süreksiz) olur.

$x^2-7=0$

$x^2=7$

$x=-\sqrt{7}, +\sqrt{7}$

Demek ki süreksiz olduğu iki nokta bunlar.

O zaman $x=3$ için sürekli.

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=\lim_{x\to 3^+} f(x)$

$\dfrac{a}{3^2-7}=\dfrac{a.3}{3+2}=3b-2$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{3a}{5}$ $\quad$ $\dfrac{3a}{5}=3b-2$

$5a=6a$ $\quad$ $0=3b-2$

$a=0$ // $\quad$ $b=\dfrac{2}{3}$ //

8) $g(x)=\dfrac{\sin x}{1*2\cos x}$

HATA!

fonksiyonunu $[\,0,2\pi\,)$ aralığında süreksiz yapan x değerleri kaç tanedir?

Burası + olmalı.

paydayı sıfır yapan noktalarda tanımsız, yani süreksizdir.

$1+2\cos x=0$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$

$x=120^\circ$ veya 240°

2 tane //

Bu üç kuralı sağlayan (sürekli olduğu) aralık

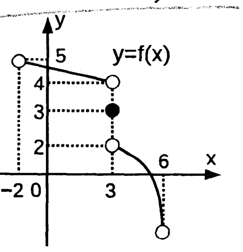
$(2,\infty)-\{3\}$ //

9) $f(x)=\sqrt{x^2-7x-m}$
fonksiyonu tüm reel sayılarda sürekli ise m nasıl seçilmelidir?

Kök içi daima pozitif olmalı. Bunun için x^2'nin katsayısı pozitif olmalı ve $\Delta<0$ olup kök olmamalı.

$$\Delta=(-7)^2-4.1.(-m)<0$$
$$49+4m<0$$
$$4m<-49$$
$$m<-\frac{49}{4}$$
olmalı.

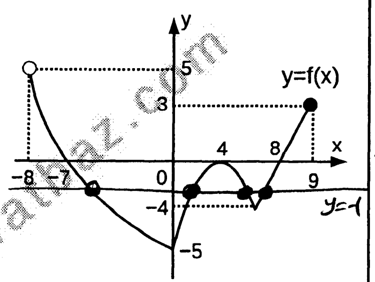
10) Grafiğe göre f(x) fonksiyonu (−2,6) aralığında sürekli olduğu x tam sayı değerleri toplamı kaçtır?



$x=\{-1, 0, 1, 2, 4, 5\}$'de sürekli.

$\cancel{-1}+0+\cancel{1}+2+4+5=11$

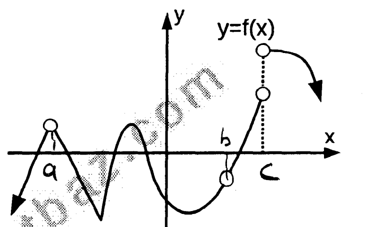
11) Grafiğe göre
$g(x)=\dfrac{1}{1+f(x)}$
fonksiyonu (−8,9) aralığında kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?



paydayı sıfır yapan 1+f(x) değerlerinde süreksizdir.
$1+f(x)=0$
$f(x)=-1$

→ y=−1 doğrusu çizildiğinde fonksiyonu 4 noktada kestiğinden 4 noktada payda sıfır olur, g(x)'de süreksiz olur.

12) Grafiğe göre y=f(x) fonksiyonu reel saylarda kaç x reel sayı değeri için süreksizdir?

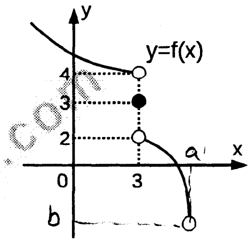


noktalara a, b, c isimleri verirsek bu üç noktada süreksizdir. Bu noktaları inceleyelim ayrıca.

a ve b için → sağ ve sol limit eşit ama f(a) ve f(b) tanımlı değil.

c için → hem f(c) tanımlı değil, hem de sağ limit sol limite eşit değil.

13) Şekilde y=f(x) fonksiyonun grafiği veriliyor f(x)+g(x) süreklidir.
Buna göre g(x) fonksiyonu nasıl bir grafiğe sahip olabilir, çiziniz?



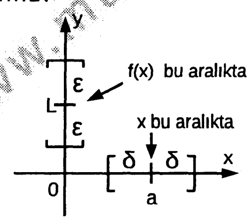
Birçok fonksiyon yazılabilir. Bir kolay bir tane seçelim

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ 1, & x=3 \\ f(x)+2, & 3<x<a \\ 1, & a\le x \end{cases}$$

Genel Kültür

LİMİTİN FORMEL TANIMI (EPSİLON-DELTA) TEKNİĞİ

$A\subset R$ $f:A \to R$ bir fonksiyon ve $a\in R$ ve $L\in R$ olsun.
$\forall\varepsilon>0$ için $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ koşulunu sağlayan $\delta>0$ sayısı bulunabiliyorsa $x \to a$ için f fonksiyonun limiti L olur. Bu tanım geometrik olarak verilmiştir inceleyiniz.



Burada anafikir, verilen her delta sayısı için a sayısını içeren reel sayı aralığı ne kadar daraltılırsa daraltılsın, f(x) değerlerinin de L yi içine alacak bir aralığa hapsedebiliyorsak limit L dir deriz.
İnceleyiniz (GEOGEBRA BAĞLANTISI)

Örnek...12 :
$f(x)=x+2$ fonksiyonu için $\lim_{x\to 5} f(x)=7$ olduğunu $\varepsilon-\delta$ tekniği ile gösteriniz.

Liselerde konu artık verilmemektedir. Arzu edenler araştırabilirler, linkleri inceleyebilirler.

GEOGEBRA BAĞLANTI LİNKİ:
https://www.geogebratube.org/student/m16251