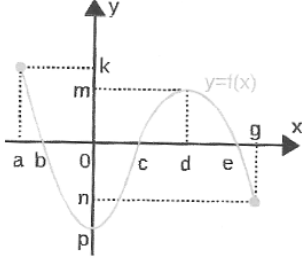


FONKSİYONLAR 6

(FONKSİYONLARIN GERÇEK HAYAT UYGULAMALARI)

FONKSİYONUN EKSENLERİ KESİM NOKTALARI

$y=f(x)$ fonksiyonunun x ekseninin kestiği noktaların apsisi b, c, e dir. Bu noktalar $f(x)=0$ denkleminin kökleridir $y=f(x)$ in y eksenini kestiği nokta ise $(0,p)$ noktasıdır.



Örnek...1 :

$f(x) = \frac{mx+n}{3x+2}$ fonksiyonunun grafiği Oy eksenini ordinatı 3 olan noktada , Ox eksenini de apsisi -1 olan noktada kesmektedir. Buna göre $f^{-1}(-6)$ kaçtır?

$$x=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow \frac{m \cdot 0 + n}{3 \cdot 0 + 2} = 3 \Rightarrow \frac{n}{2} = 3 \Rightarrow n=6$$

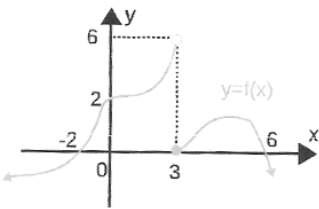
$$x=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow \frac{-m+n}{-3+2} = 0 \Rightarrow m=n=6$$

$$f(x) = \frac{6x+6}{3x+2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x+6}{3x-6}$$

$$f^{-1}(6) = \frac{12+6}{-18-6} = \frac{18}{-24} = -\frac{3}{4}$$

Örnek...2 :

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $(f \circ f)(x+2)=2$ denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?



Grafikten

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(-2) &= 0 \\ f(3) &= 0 \\ f(6) &= 0 \end{aligned}$$

$$f \circ f(x+2) = f(f(x+2)) = 2$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

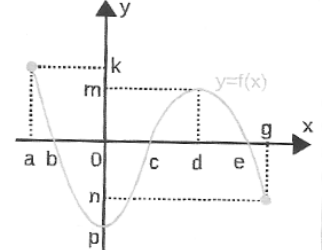
$$x = -4 \vee x = 1 \vee x = 4$$

$$\sum x = -4 + 1 + 4 = 1$$

FONKSİYONUN POZİTİF NEGATİF OLDUĞU ARALIKLAR

Analitik düzlemde grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonu, x ekseninin üst tarafında pozitif değerler alırken, x ekseninin alt tarafında negatif değerler alır.

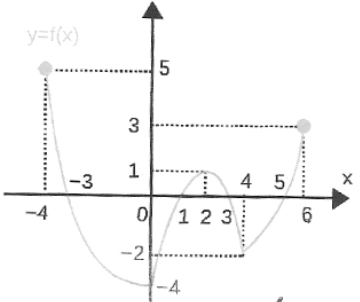
$f: [a,g] \rightarrow [p,k]$ tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b) \cup (c,e)$ aralığında pozitif değerler, $(b,c) \cup (e,g)$ aralığında ise negatif değerler alır.



Örnek...3 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu aralıkları yazınız.



	-4	-3	1	3	5	6	
Tanımlı değil							Tanımlı değil
	+	-	+	-	+		

İKİ NİCELİK ARASINDAKİ İLİŞKİ

$y=f(x)$ fonksiyonunda x' e bağımsız değişken, y' ye ise bağımlı değişken denir.

Örneğin zamana göre bir hareketlinin V hızı ile aldığı yol fonksiyonu $S(t)=V \cdot t$ ise buradaki t (süre) bağımsız, S (alınan yol) bağımlı değişkendir.

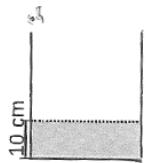
Örnek...4 :

Bir depoda 10 cm yüksekliğinde su vardır. Deponun üstündeki musluktan akan su her saatte su yüksekliğini 7 cm arttırmaktadır. x saat sonra depodaki suyun yüksekliği $h(x)$ olduğuna göre, $h(x)$ fonksiyonunu yazınız?

$$h(0)=10 \quad h(1)=10+7 \quad \rightarrow \quad 10+7x = h(x)$$

$$h(2)=10+7+7$$

...



FONKSİYONLAR 6

(FONKSİYONLARIN GERÇEK HAYAT UYGULAMALARI)

Örnek...5 :

Bir oto kiralama şirketi müşterilerinden kira ücreti olarak 1. gün 60 lira ve daha sonraki her bir gün için 40 lira ücret talep etmektedir. Buna göre ödenen ücreti, kiralama süresinin (gün) bir fonksiyonu olarak yazıp 1 haftalık kira ücretinin kaç lira olduğunu bulalım.

$$K = 60 + 40 + 40 + \dots$$

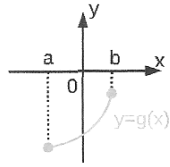
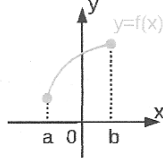
$$K(t) = 60 + 40(t-1) = 60 + 40t - 40 = 40t + 20$$

$$K(7) = 60 + 40 \cdot 6 = 60 + 240 = \underline{\underline{300}}$$

FONKSİYONUN ARTAN AZALAN OLDUĞU ARALIKLAR ARTAN FONKSİYON

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1 \in B \subset A$ için $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonuna A kümesinde artan fonksiyon denir.

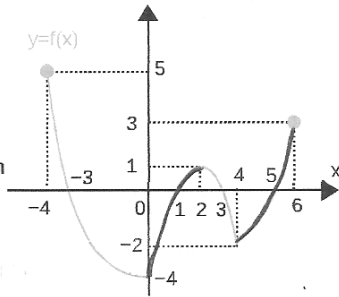
$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif artandır.



$y=g(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında negatif artandır.

Örnek...6 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun artan olduğu aralıkları yazınız.



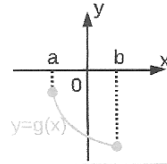
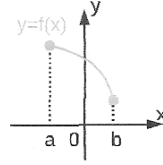
Artan olduğu aralıklar
(0,2) (4,6)

AZALAN FONKSİYON

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

Her $x_1 \in B \subset A$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu B kümesinde azalan fonksiyondur denir.

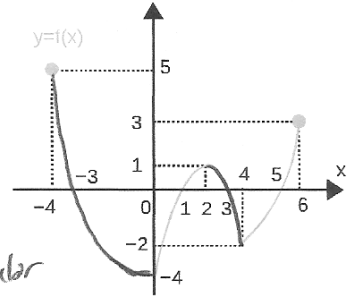
$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında pozitif azalandır.



$y=g(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında negatif azalandır.

Örnek...7 :

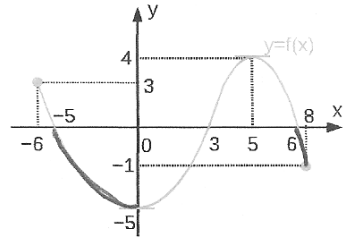
$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun azalan olduğu aralıkları yazınız.



Azalan olduğu aralıklar
(-4,-3) ve (2,4)

Örnek...8 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun negatif ve azalan olduğu aralıktaki x tamsayılarının toplamı kaçtır?



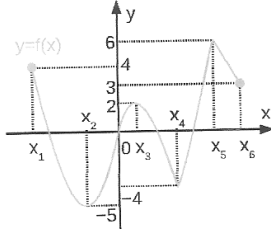
(-5,0) ∪ (6,8)

-4, -3, -2, -1, 7

toplam = -3

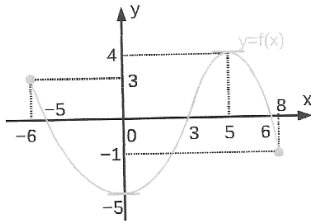
FONKSİYONUN MAKSİMUM MİNİMUM DEĞERLERİ

$y=f(x)$ fonksiyonu x_1, x_3, x_5 absisli noktalarda yerel maksimum değerler, x_2, x_4, x_6 absisli noktalarda ise yerel minimum değerler alır. Bu değerlere ekstremum noktaları da denir.



Örnek...9 :

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyonun maksimum ve minimum değer aldığı absislerin toplamı kaçtır?



-6, 5 yerel maksimumlar

0, 8 yerel minimumlar

$$-6 + 5 + 0 + 8 = 7$$

DEĞİŞİM HIZI VE KESENİN EĞİMİ

İki değişkenden birinin değişim miktarının, diğerinin değişim miktarına oranı **değişim hızını** verir. Örneğin, Ayşe' nin kilosunun yaşına göre değişim hızı,

$$\text{Değişim Hızı} = \frac{\text{Kilo değişim miktarı}}{\text{Yaş değişim miktarı}} \text{ dır.}$$

$y = f(x)$ doğrusal fonksiyonu genellikle, $f(x)=m \cdot x+n$ biçiminde yazılır. Bu fonksiyonun y sinin x ine göre değişim hızına doğrunun eğimi denir. Eğim genellikle "m" harfi ile gösterilir.

$$\text{Değişim Hızı} = \frac{y \text{ deki değişim miktarı}}{x \text{ deki değişim miktarı}} = \text{Eğim}$$

Örnek...10 :

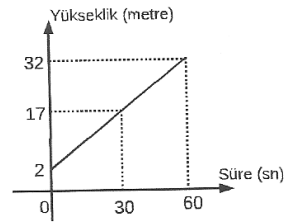
Yaş(yıl)	Kilo(kg)
12	33
15	39
20	51

Ayşe' nin yaş - kütle tablosu verilmiştir. Ayşe' nin kütlesinin yaşına göre değişim hızını yıllara göre bulunuz? (12-15 yılları arası) (15-20 yılları arası)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{39-33}{15-12} = \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{51-39}{20-15} = \frac{12}{5}$$

Örnek...11 :

Ali elindeki uçan balonu kaçırıyor. Başlangıçta yerden 2 metre yükseklikte ki balonun yüksekliğinin zamana (saniye) göre değişim grafiği yanda verilmiştir. Balonun yüksekliğinin zamana göre değişim hızı kaçtır?

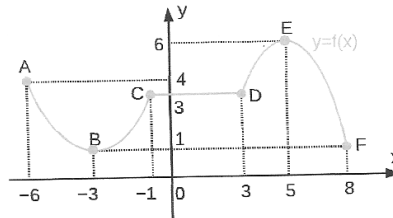


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{17-2}{30-0} = \frac{32-17}{60-30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

UYARI

Değişim hızı (eğim) **pozitif, negatif ve sıfır** olabilir.

Örnek...12 :



$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Aşağıda verilen aralıklarda $y=f(x)$ fonksiyonunun ortalama değişim hızını bulunuz?

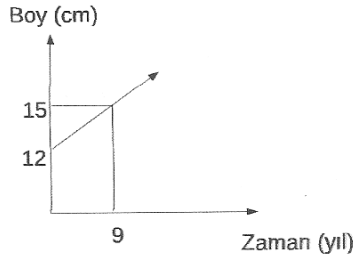
$$a) [-6, -3] \quad \frac{1-4}{-3-(-6)} = -1 \quad b) [-3, -1] \quad \frac{3-1}{-1-(-3)} = 1$$

$$c) [-1, 3] \quad \frac{3-3}{3-(-1)} = 0 \quad d) [3, 5] \quad \frac{6-3}{5-3} = \frac{3}{2}$$

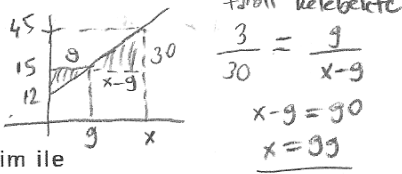
$$e) [5, 8] \quad \frac{1-6}{8-5} = -\frac{5}{3}$$

Örnek...13 :

Grafik bir bitkinin boyunun zamana göre değişimini vermektedir buna göre bitkinin boyu kaç yıl sonra 45 cm olur?



1.yol geometri kullanarak



2. yol eğim ile

$(0, 12), (9, 15), (x, 45) \rightarrow$ doğrusal eğimler aynı

$$\frac{15-12}{9-0} = \frac{45-12}{x} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{33}{x} \Rightarrow x = 99$$

3. yol doğru denklemleri ile

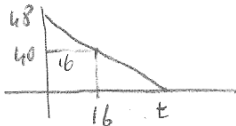
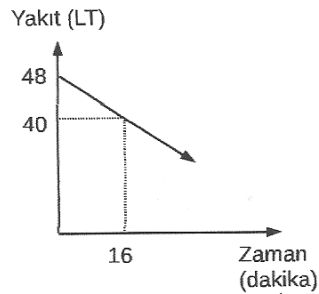
$$m = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 12 = \frac{1}{3}(x - 0) \quad y = 45 \text{ olsun}$$

$$45 - 12 = \frac{1}{3} \cdot x \Rightarrow x = 99$$

Örnek...14 :

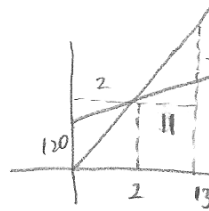
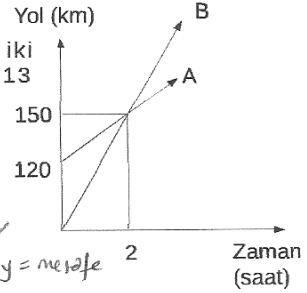
Şekilde bir aracın yakıt deposundaki benzinin zamana bağlı değişimi görülmektedir. Hızı dakikada 18 metre olan bu araç durana kadar kaç km yol alır?



$$x = v \cdot t \Rightarrow x = 18 \cdot 96 = 1728 \text{ m}$$

Örnek...15 :

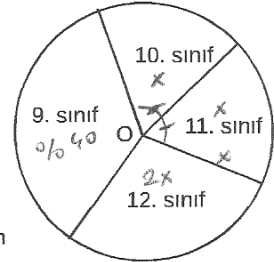
Aynı anda harekete başlayan iki araç arası mesafe 13 saat sonra kaç km olur?



$$\frac{120}{2} = \frac{y}{13} \Rightarrow y = 660$$

Örnek...16 :

Şekildeki O merkezli dairesel grafikte bir okulda okuyan öğrencilerin sınıflara göre dağılımını göstermektedir. Bu okulda 9. sınıfa giden öğrenciler tüm öğrencilerin %40'ıdır. 10 ve 11. sınıfa devam eden öğrenci sayısı eşit ve 12. sınıfa devam eden öğrenci sayısının yarısı kadarsa 11. sınıfları gösteren dilimin merkez açısı kaç derecedir?

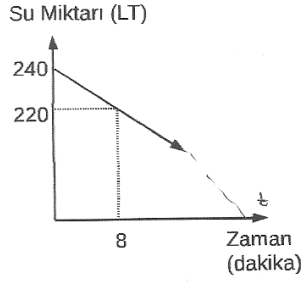


$$\%60 \quad 4x \Rightarrow x = \%15$$

$$\begin{aligned} 10 \text{ sınıf} &\rightarrow x \\ 11 \text{ sınıf} &\rightarrow x \\ 12 \text{ sınıf} &\rightarrow 2x \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 10 \text{ sınıf} &\rightarrow x \\ 11 \text{ sınıf} &\rightarrow x \\ 12 \text{ sınıf} &\rightarrow 2x \end{aligned}} \right\} \%60$$

Örnek...17 :

Şekil hacmi 240 litre olan bir havuzun tabanındaki bir musluğun açılmasıyla havuzda kalan su miktarının zamana göre değişimi verilmiştir. Havuz doluyken bu musluğa eş bir musluk havuzu boşaltacak şekilde havuzun tam ortasına konulursa havuz kaç saatte boşalır?

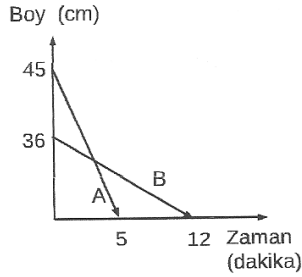


8 dk 20 Lt boşalıyor
 x dk 240 Lt $x = \frac{240 \cdot 8}{20} = 96$ dk

1 musluk 96 dk ise 2 musluk 48 dk da boşaltır !

Örnek...18 :

Şekilde aynı anda yakılan mumların boylarının zamana göre değişimi verilmiştir. Buna göre kaçinci dakikada bir mumun boyu diğerinin iki katı olur?



A mumu 1 dk da $\frac{45}{5} = 9$ cm eriyor
 B mumu 1 dk da $\frac{36}{12} = 3$ cm eriyor

$$\frac{36-3t}{45-9t} = 2 \Rightarrow 90-18t = 36-3t$$

$$15t = 54$$

$$t = \frac{54}{15} = \frac{18}{5}$$

$$t = 3.6$$

UYARI (FONKSİYON YAZILARI)

$s(A)=a$ ve $s(B)=b$ olmak üzere A dan B ye

1. toplam b^a
2. b tane sabit
3. $P(b,a)$ birebir ($a \leq b$) fonksiyon tanımlanabilir.

Örnek...19 :

Doğal sayılar kümesinden bir basamaklı asal sayılar kümesine kaç farklı sabit fonksiyon tanımlanır?

$$f: \mathbb{N} \rightarrow A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$s(A)=4 \Rightarrow 4 \text{ adet sabit fonksiyon tanımlanır}$$

Örnek...20 :

$A=\{0,1,2,(3,4),5\}$ kümesinden

$B=\{x: x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 25\}$ kümesine kaç farklı birebir olmayan fonksiyon tanımlanır? $B=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 5\}$

$$s(A)=5 \quad s(B)=11$$

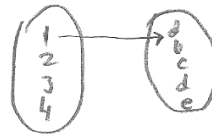
toplam 11^5 fonksiyon tanımlanır.

bire-bir olan $P(11,5)$

bire-bir olmayan $11^5 - P(11,5)$

Örnek...21 :

$A=\{1,2,3,4\}$ kümesinden $B=\{a,b,c,d,e\}$ kümesine $f(1)=a$ olacak şekilde en çok kaç farklı birebir fonksiyon tanımlanır?



istenen 4 elemanın 3'ü sınırlanmış

$$P(4,3) = 4! = 24$$

FONKSİYONLAR 6

(FONKSİYONLARIN GERÇEK HAYAT UYGULAMALARI)

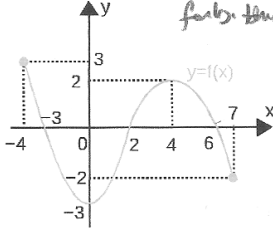
Değerlendirme

- 1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinde tanımlanabilen içine fonksiyon sayısı kaçtır? (A dan A ya)

1-1 değışik değildir.

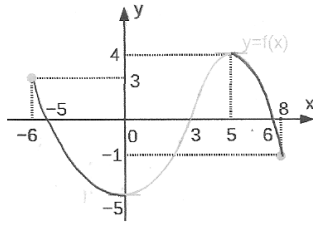
A dan A ya 4^4 toplam ve $P(4,4) = 4!$ olabilir
 $4^4 - 4! = 252$

- 2) $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğı verilmiştir. $f(x) < 0$ eşitsizliğini sağlayan tam sayı apsislerin toplamı kaçtır?



$-2, -1, 0, 1, 7 \rightarrow 5/11$

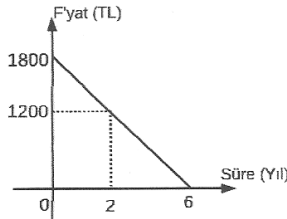
- 3) $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğı verilmiştir. Fonksiyonun azalan olduğu aralıktaki x tamsayılarının toplamı kaçtır?



Azalan
 $(-6, 0) \cup (5, 8)$

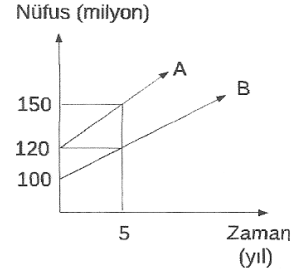
$-6-4-3-2-1+6+7 = 0/11$

- 4) Bir akıllı telefonun üretildiğı tarihten itibaren fiyatında ki değışim grafiğı verilmiştir. Akıllı telefonun fiyatının zamana göre değışim hızı kaçtır?



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1800-1200}{0-2} = \frac{600}{-2} = -300$$

- 5) Şekilde A ve B ülkelerinde nüfusun zaman bağılı değışimi verilmiştir buna göre bu iki ülke nüfusu arasındaki fark 90 milyon olur?

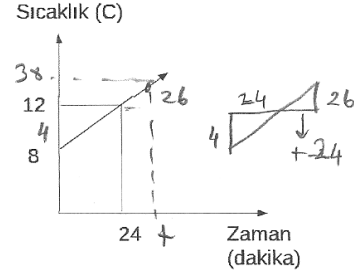


$$A = 120 + 6t$$

$$B = 100 + 4t$$

$$120 + 6t - (100 + 4t) = 90$$

- 6) Şekilde bir A maddesinin sıcaklığının zamana göre değışimi veriliyor. Bu maddenin sıcaklığı kaçınıcı dakıda 38 derece olur?

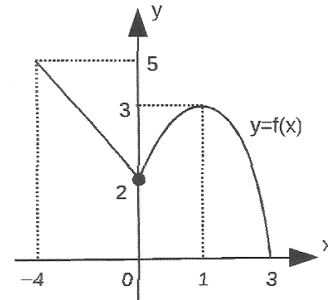


$$\frac{4}{26} = \frac{6}{+24}$$

$$156 = t - 24$$

$$t = 180$$

- 7) $[-4, 3]$ aralığında grafiğı şekildeki gibi olan $y=f(x)$ fonksiyonunun aşağıda verilen aralıklarda ortalama değışim hızını bulunuz?



- a) $[-4, 0]$
b) $[0, 1]$
c) $[-4, 3]$

$$a) \frac{2-5}{0-(-4)} = -3/4$$

$$b) \frac{3-2}{1-0} = 1$$

$$c) \frac{0-5}{3-(-4)} = -5/7$$