

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -3

KÖK KATSAYI İLİŞKİSİ

KÖK KATSAYI BAĞINTILARI

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere bu denklem için delta çözüm bağıntısında gerekli işlemler yapılırsa

- a) kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
 b) kökler çarpımı $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ olarak elde edilir
 c) $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

Örnek...1 :

$x^2-4x+2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun buna göre istenenleri bulunuz.

- a) $x_1 + x_2 = ?$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-4)}{1} = 4$
 b) $x_1 \cdot x_2 = ?$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$
 c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = ?$ $\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-b/a}{c/a} = \frac{-4/1}{2/1} = -2$
 d) $x_1^2 + x_2^2 = ?$ $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \cdot 2 = 16 - 4 = 12$
 e) $x_1^2 - x_2^2 = ?$

Örnek...2 :

$x^2-4x+m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ve olsun $2x_1-x_2=8$ ise m kaçtır?

$$\begin{aligned} &+ x_1 + x_2 = 4 \\ &\frac{3x_1}{3} = 12 \\ &x_1 = 4 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &4^2 - 4 \cdot 4 + m = 0 \\ &m = 0 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$x^2+mx+16=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun $x_1=x_2^3$ ise m kaç olabilir?

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 = 16 &\Rightarrow x_2^3 \cdot x_2 = 16 \Rightarrow x_2^4 = 16 \\ &x_2 = 2 \\ 2^2 + 2m + 16 &= 0 \\ m &= -10 \end{aligned}$$

Örnek...4 :

$x^2-8x+2=0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması geometrik ortalamasının kaç katıdır?

$$\begin{aligned} A.O &= \frac{x_1 + x_2}{2} & G.O &= \sqrt{x_1 \cdot x_2} \\ 6.0 &= \frac{8}{2} & &= \frac{8/2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Örnek...5 :

$x^2-3x+m=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun $x_1^2 + x_2^2 = 11$ ise m kaçtır?

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \\ 3^2 &= 11 + 2 \cdot m \rightarrow m = -1 \end{aligned}$$

Örnek...6 :

$x^2-6x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1^2 - x_2^2$ kaç olabilir?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6 & x_1 - x_2 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{\sqrt{36-4}}{1} = 4\sqrt{2} \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) &= 4\sqrt{2} \cdot 6 = 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

Örnek...7 :

$x^2-8x+4=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ kaçtır?

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= d \text{ olsun.} \\ (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 &= d^2 \rightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = d^2 \\ 8 + 2\sqrt{4} &= d^2 \\ 8 + 4 &= d^2 \rightarrow 2\sqrt{3} = d \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$(k+1)x^2 + (6-k)x + 5 - k = 0$ denkleminin simetrik iki kökü varsa bu köklerin çarpımı kaçtır?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \text{ (simetrik kök)} \\ \frac{-(6-k)}{k+1} &= 0 \Rightarrow k = 6 \\ 7x^2 - 1 &= 0 & x_1 \cdot x_2 &= -1/7 \end{aligned}$$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -3

KÖK KATSAYI İLİŞKİSİ

Not

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklem en genel haliyle $a.(x-x_1).(x-x_2)=0$ olarak yazılabilir. Bu denklem düzenlenerek yazılırsa $x^2-(x_1+x_2)x+x_1.x_2=0$

Yani $T=x_1+x_2$ ve $Ç=x_1.x_2$ olmak üzere kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklem $x^2-Tx+Ç=0$ olur.

Örnek...9 :

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci derece denklemleri yazınız.

1) $x_1=3$ ve $x_2=4$ $(x-3)(x-4)=0$
 veya $x^2-Tx+Ç=0$ $x^2-7x+4=0$

2) $x_1=-2$ ve $x_2=5$ $T=3$ $Ç=-10$
 $x^2-3x-10=0$

3) $x_1=0$ ve $x_2=-7$ $T=-7$ $Ç=0$
 $x^2+7x=0$

4) $x_1=\sqrt{3}-2$ ve $x_2=\sqrt{3}+2$
 $x_1+x_2=2\sqrt{3}$ $x_1.x_2=3-4=-1$
 $x^2-2\sqrt{3}x+(-1)=0$

Örnek...10 :

$x^2-8x+2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere kökleri $\frac{1}{x_1}$ ve $\frac{1}{x_2}$ olan ikinci dereceden deklemini yazınız.

$$T = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1.x_2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$Ç = \frac{1}{x_1} . \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1.x_2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2-4x+\frac{1}{2}=0 \text{ veya } 2x^2-8x+1=0$$

$$x_1+x_2=3 \quad x_1.x_2=1$$

Örnek...11 :

$x^2-3x+1=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere kökleri $\frac{1}{2x_1-1}$ ve $\frac{1}{2x_2-1}$ olan ikinci dereceden deklemini yazınız.

$$T = \frac{1}{2x_1-1} + \frac{1}{2x_2-1} = \frac{2(x_1+x_2)-2}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1} = -4$$

$$Ç = \frac{1}{2x_1-1} . \frac{1}{2x_2-1} = \frac{1}{4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1} = -1$$

$$x^2-Tx+Ç=0 \Rightarrow x^2+4x+(-1)=0 \Rightarrow x^2+4x-1=0$$

Uyarı

- Köklerinden biri $x_1=a+\sqrt{b}$ olan ikinci dereceden denklemin katsayıları rasyonelse diğer kök $x_2=a-\sqrt{b}$ olur.
- i sanal sayı birimi olmak üzere, köklerinden biri $x_1=m+ni$ olan ikinci dereceden denklemin, katsayıları reelse diğer kök $x_2=m-ni$ olur.(eşleniktir)

Örnek...12 :

$x_1=2-4\sqrt{3}$ ve rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemini yazınız

$$x_1=2-4\sqrt{3} \quad x_2=2+4\sqrt{3} \quad x_1+x_2=4$$

$$x_1.x_2=4-48=-44$$

$$x^2-Tx+Ç=0$$

$$x^2-4x-44=0$$

Örnek...13 :

$x_1=3-2i$ ve reel katsayılı ikinci dereceden denklemini yazınız

$$x_1=3-2i$$

$$x_2=3+2i$$

$$T=6$$

$$Ç=9-4i^2=13$$

$$x^2-6x+13=0$$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -3

KÖK KATSAYI İLİŞKİSİ

DEĞERLENDİRME

- 1) $x^2 - mx + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\frac{2}{x_1} - x_2 = 3$ ise m kaçtır?

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 3$$

$$2 - x_1 x_2 = 3 \Rightarrow 2 - 3 = 3 x_1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}$$

yerine yazalım

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - m \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 0$$

$$\frac{1}{9} + \frac{m}{3} + 3 = 0$$

$$1 + 3m + 27 = 0$$

$$m = -\frac{28}{3}$$

- 2) $x^2 - 8x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3)$ kaçtır?

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8 \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 4$$

$$4x_1 x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 9$$

$$4 \cdot 4 - 6 \cdot 8 + 9 = 16 - 48 + 9 = -23$$

- 3) $x^2 + kx + p = 0$, $x_1 = 2$
 $x^2 - (k+5)x - 24 = 0$, $x_1 = -3$

yukarıda birer kökleri verilen denklemlerin diğer kökleri ortak ise p kaçtır?

0 kök kök x_2 olsun.

(İkinci) $x_1 + x_2 = -k$ $x_1 \cdot x_2 = p$

(İlkinci) $x_1 + x_2 = k + 5$

$$2 + x_2 = -k$$

$$-3 + x_2 = k + 5$$

$$-1 + 2x_2 = 5$$

$$x_2 = 3$$

$$k = -5$$

$$3 - 5 \cdot 3 + p = 0$$

$$-6 + p = 0$$

$$p = 6$$

- 4) $x^2 - 8x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ kaçtır?

$$\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = k \text{ olsun.}\right)^2 \quad x_1 + x_2 = 8$$

$$x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = k^2 \quad x_1 \cdot x_2 = 4$$

$$8 - 2 \cdot \sqrt{4} = k^2$$

$$8 - 4 = k^2$$

$$4 = k^2 \rightarrow k = 2 \quad \vee \quad k = -2$$

$$(x_1 > x_2) \quad (x_1 < x_2)$$

- 5) $\frac{x^2}{125} - mx + 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ve olsun $x_1 = x_2^2$ ise m kaç olabilir?

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{125} \quad x_1 = x_2^2 \text{ ise}$$

$$x_2^2 \cdot x_2 = \frac{1}{125} \rightarrow x_2^3 = \frac{1}{125} \rightarrow x_2 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{125} - m \cdot \frac{1}{5} + 1 = 0$$

$$\frac{1}{125} - \frac{m}{5} + 1 = 0$$

$$1 - 125m + 125 = 0 \rightarrow m = \frac{126}{125} //$$

- 6) $x^2 + kx - 2 = 0$
 $2x^2 - (k+2)x - p = 0$

denklemlerinin çözüm kümeleri aynıysa, $\frac{p}{k}$ oranı ise kaç olabilir? *katayabilir oranıdır.*

$$\frac{1}{2} = \frac{k}{k+2} = \frac{p}{-p} \Rightarrow p = 4$$

$$2k = -k - 2$$

$$k = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{p}{k} = \frac{4}{-\frac{2}{3}} = -6 //$$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -3

KÖK KATSAYI İLİŞKİSİ

- 7) $x^2 - (x_1 - x_2)x + 4 + a = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise a kaçtır?

$$x_1 + x_2 = x_1 - x_2 \rightarrow 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$0 + 0 + 4 + a = 0 \rightarrow a = -4$$

- 8) $2x^2 + mx - 3x + 4m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ ise m kaç olabilir?

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{2} \quad (*)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4m}{2} = 2m$$

$$x_1 + x_2 = \frac{m-3}{2}$$

$$2m = \frac{m-3}{2} \rightarrow 4m = m-3$$

$$3m = -3$$

$$m = -1$$

- 9) $x^2 + x + k = 0$ denklemlerinin birer kökü ortak $x^2 + 6x - 4k = 0$ ise k sayısının alabileceği değerleri bulunuz?

ortak kök p ise

$$p^2 + p + k = 0 = p^2 + 6p - 4k$$

$$5k = 5p \rightarrow p = k$$

kök yerine yazılır

$$k^2 + k + k = 0 \rightarrow k(k+2) = 0$$

$$k = 0 \vee k = -2$$

- 10) $x_1 = \sqrt{5} - 2$ ve rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazınız

$$x_1 = \sqrt{5} - 2$$

$$x_2 = -\sqrt{5} - 2$$

$$x_1 + x_2 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = -5 + 4 = -1$$

$$x^2 - Tx + G = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0$$

- 11) $x_1 = \sqrt{7} - 2i$ ve reel katsayılı ikinci dereceden denklemi yazınız

$$x_1 = \sqrt{7} - 2i$$

$$x_2 = \sqrt{7} + 2i$$

$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{7}$$

$$x_1 \cdot x_2 = 7 - 4i^2 = 11$$

$$x^2 - Tx + G = 0 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{7}x + 11 = 0$$

- 12) $x^2 + x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere kökleri $\frac{1}{3x_1 - 2}$ ve $\frac{1}{3x_2 - 2}$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

$$T = \frac{1}{3x_1 - 2} + \frac{1}{3x_2 - 2} = \frac{3(x_1 + x_2) - 4}{9x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4} = -7$$

$$G = \frac{1}{3x_1 - 2} \cdot \frac{1}{3x_2 - 2} = \frac{1}{9x_1x_2 - 6(x_1 + x_2) + 4} = 1$$

$$x^2 - Tx + G = 0 \Rightarrow x^2 + 7x + 1 = 0$$