

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

SANAL SAYI BİRİMİ

$x+2=0$ denkleminin doğal sayılarda çözümü yoktur. Eğer çözüm kümesi tam sayılar kümesi olarak genişletilirse $\{-2\}$ bu denklemin çözüm kümesidir.

Benzer şekilde $2x+3=0$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur. Eğer çözüm kümesi Rasyonel Sayılar seçilirse $\{-\frac{3}{2}\}$ bu denklemin çözüm kümesidir.

Reel (gerçek) sayılarda $x^2 + 1 = 0$ biçimindeki çözümü olmayan denklemlerin çözümünü yapabilmek için tanımlanan yeni kümenin adı karmaşık sayılar kümesidir.

$i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ olarak tanımlanır. Reel olmayan sayıların gösterimi mümkün olur. Örneğin $\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-16} = 4i$, $\sqrt{-20} = 2\sqrt{5}i$ olarak yazılabilir.

Uyarı

Her a reel sayısı $a+0.i$ olarak yazılabileceğinden aynı zamanda bir karmaşık sayıdır.

KARMAŞIK SAYI

a ve b birer reel sayı ve $i^2 = -1$ olmak üzere, $z = a + bi$ şeklinde ifade edilen z sayısına ,karmaşık (kompleks) sayı denir.

Karmaşık sayılar kümesi \mathbb{C} ile temsil edilir.

Başka bir deyişle

$\mathbb{C} = \{z: z = a + bi, a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } i^2 = -1\}$ dir.

$z = a + bi$ karmaşık sayısında a ya karmaşık sayının reel (gerçek) kısmı, b ye karmaşık sayının imajiner (sanal) kısmı denir ve $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$ şeklinde gösterilir.

Örnek...1 :

Karmaşık sayıların reel ve sanal kısımlarını yazınız

- 1) $z = 3 + 8i$ $\text{Re}(z) = 3$ $\text{Im}(z) = 8$
- 2) $z = 4i - 2$ $\text{Re}(z) = -2$ $\text{Im}(z) = 4$
- 3) $z = 4i$ $\text{Re}(z) = 0$ $\text{Im}(z) = 4$
- 4) $z = \sqrt[3]{-5}$ $\text{Re}(z) = \sqrt[3]{-5}$ $\text{Im}(z) = 0$

Örnek...2 :

Sayıları sanal birim (i) kullanarak yazınız

- 1) $z = \sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$
- 2) $z = \sqrt{-49} + \sqrt[3]{-27} = 7i - 3$
- 3) $z = \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{-32} = 3 - 2i = -1 - 4i$

SANAL BİRİMİN (i-NİN) KUVVETLERİ

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \dots$

Buna göre, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, i nin kuvveti 4 ile bölündüğünde;

kalan 0 ise $i^n = 1$
kalan 1 ise $i^n = i$
kalan 2 ise $i^n = -1$
kalan 3 ise $i^n = -i$

Hatırlatma

(...abc) biçiminde bir sayının 4 ile bölümünden kalan sayı, (bc) iki basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan sayıyla aynıdır.

Örnek...3 :

Sayıları hesaplayınız

- 1) $i^0 = i^2 = -1$
- 2) $i^{2345} = i^1 = i$
- 3) $i^{4569676} = i^0 = 1$
- 4) $i^{459862583} = i^3 = -i$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

Örnek...11 :

$2z+i=4i$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz $z=x+iy$ olsun.

$$\begin{aligned} 2(x+iy)+i &= 4i(x-iy) & 2x &= 4y \text{ (reel)} \\ 2x+2iy+i &= 4ix-4i^2y & 2y+1 &= 4x \text{ (söel)} \\ x=2y & \rightarrow 2y+1=8y \rightarrow y &= \frac{1}{6} & x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Örnek...12 :

$\sqrt{-3}, \sqrt{-36}, \sqrt{(-2)^2}, \sqrt[3]{-64}$ işleminin sonucu kaçtır?

$$i, \sqrt{3}, 6, 2, -4 = -48\sqrt{3};$$

Örnek...13 :

$$(1+i)^2 = ? \quad 1+2i+i^2 = 2i$$

Örnek...14 :

$$(1+i)^{100} = ? \quad [(1+i)^2]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50} \cdot i^{50} = 2^{50} \cdot i^2 = -2^{50}$$

Örnek...15 :

$$\begin{aligned} (2+2i)^{69} = ? & \quad [2(1+i)]^{69} = 2^{69} \cdot [(1+i)^{34}] \cdot (1+i) \\ & \quad 2^{69} \cdot (2i)^{34} \cdot (1+i) = 2^{103} \cdot i^{34} \cdot (1+i) \\ & \quad = -2^{103} \cdot (1+i) \end{aligned}$$

Örnek...16 :

$x^2+4=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned} x^2 - 4i^2 &= 0 & x^2 &= 4i^2 & \Delta &= 0 - 4 \cdot 4 = -16 \\ x &= 2i & & & x_1 &= \frac{-0 - \sqrt{-16}}{2} = -2i \\ x &= -2i & & & x_2 &= +2i \end{aligned}$$

Örnek...17 :

$x^2+2x+6=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 4 - 24 = -20 \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{2} \\ x_1 &= -1 - \sqrt{5}i & x_2 &= -1 + \sqrt{5}i \end{aligned}$$

Örnek...18 :

$x^2+4x+8=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 & \sqrt{\Delta} &= 4i \\ x_1 &= \frac{-4 - 4i}{2} & x_2 &= \frac{-4 + 4i}{2} \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm 2i \end{aligned}$$

Örnek...19 :

$x^2+x+1=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz?

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i \\ x_1 &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} & x_2 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Örnek...20 :

a ve c reel sayılar olmak üzere, $x^2 - ax + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $3-i$ olduğuna göre, $a+c$ yi bulunuz.

$$\begin{aligned} (3-i)^2 - a(3-i) + c &= 0 & 9 - 6i + i^2 - 3a + 3a + c &= 0 & 8 - 18 + c &= 0 \\ 9 - 6i + i^2 - 3a + 3a + c &= 0 & & & c &= 10 \\ 8 - 3a + c + i(-6+a) &= 0 & & & 8 + c &= 16 \end{aligned}$$

3. Bölme

$z_1 = a+ib$ ve $z_2 = c+id$ verilsin

$z_1 : z_2 = (a+ib) : (c+id) = \frac{a+ib}{c+id}$ işlemi yapılırken pay ve payda paydanın eşleniği ile genişletilir

Örnek...21 :

$$\frac{8+6i}{1+2i} = ? \quad \frac{8+6i-16i-12i^2}{1-4i^2} = \frac{20-10i}{5} = 4-2i$$

Örnek...22 :

$$\begin{aligned} \frac{2+i}{1+3i} + \frac{3i-1}{1-2i} &= ? & \frac{2+i-6i-3i^2}{1-9i^2} + \frac{3i-1+6i^2-2i}{1-4i^2} \\ (1-3i) & (1+2i) & \frac{5-5i}{10} + \frac{-7+i}{5} &= \frac{-9-3i}{10} \end{aligned}$$

İKİNCİ DERECE DENKLEMLER -2

SANAL BİRİM

DEĞERLENDİRME

- 1) $z = 3 + 2i$ olduğuna göre, $\frac{z+2}{z-2} = ?$

$$\frac{3-2i+3+2i}{3+2i-(3-2i)} = \frac{6}{4i} = \frac{-6i}{4} = -\frac{3i}{2}$$

- 2) $-(1-i)^{39} = -[(1-i)^2]^{39}$
 $= -[-2i]^{39} = +2^{39}i$
 $= -2^{39}i$

- 3) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = \left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{100} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{100} = i^{100} = 1$

- 4) $\operatorname{Re}\left(\frac{8i-2}{3-i}\right) = \frac{24i-6+8i^2-2i}{9+1} = \frac{22i-14}{10}$

$$\operatorname{Re} = \frac{-14}{10} = -\frac{7}{5}$$

- 5) $z(1+2i)-2iz = i\bar{z}+2$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayısını bulunuz

$$\begin{aligned} z &= x+iy \\ (x+iy)(1+2i) - 2i(x+iy) &= i(x-iy) + 2 \\ x+2ix+iy+2i^2y - 2ix-2i^2y &= ix-y+2 \\ x-2y+2y &= y+2 \rightarrow x=y+2 \\ 2x+iy-2x &= x \rightarrow y=x \\ & \text{biye bir karmaşık sayı yoktur!} \end{aligned}$$

- 6) $x^2+2x+3=0$ denkleminin karmaşık sayılarda çözüm kümesini bulunuz

$$\begin{aligned} \Delta &= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 \\ x_1 &= \frac{-2 + \sqrt{-8}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}i}{2} = -1 + \sqrt{2}i \\ x_2 &= -1 - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

- 7) $x^3+2x^2+3x+px=0$ denkleminin iki karmaşık bir reel kökü varsa p nasıl seçilmelidir?

$$\begin{aligned} x(x^2+2x+p+3) &= 0 \rightarrow x=0 \text{ reel kök} \\ \Delta < 0 \quad 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+3) < 0 \\ 4 - 4p - 12 < 0 \\ -8 < 4p \\ -2 < p \end{aligned}$$

- 8) m ve n reel sayılar olmak üzere, $mx^2+x+n=0$ ikinci dereceden denkleminin köklerinden biri $1-i$ olduğuna göre, $m-n$ yi bulunuz.

$$\begin{aligned} m(1-i)^2 + (1-i) + n &= 0 \\ m(1-3i+3i^2-i^3) + 1-i+n &= 0 \\ (-2i-2)m + 1-i+n &= 0 \\ i(-2m-1) - 2m+1+n &= 0 \\ -2m-1=0 \quad -2m+1+n &= 0 \\ m = -\frac{1}{2} \quad 2+n=0 \\ n &= -2 \\ m-n &= -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- 9) $3-7i$ karmaşık sayısının çarpma işlemine göre tersinin imajiner (sanal) kısmını bulunuz

$$\frac{1}{3-7i} = \frac{3+7i}{9+49i^2} = \frac{3+7i}{-40} = -\frac{3+7i}{40}$$

$$\operatorname{Im} = \frac{7}{40}$$