

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER -1

DENKLEMİN ÇÖZÜM KÜMESİ

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

a,b,c birer reel sayı $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ ifadesine ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Örnek...1 :

$x^m - (m-2)x - 1 = 0$ ifadesi ikinci dereceden bir denklem belirtiyorsa m kaçtır?

$$\begin{aligned} m-2 &= 2 \\ m &= 4 \end{aligned}$$

$ax^2+bx+c=0$ denklemini eğer sağlayan değer veya değerler varsa bu ifadelere kök denir. Köklerin oluşturduğu kümeye de çözüm kümesi denir.

Örnek...2 :

$x^2 + 6x + k + 19 = 0$ denkleminin bir kökü $x = -3$ ise , k kaçtır?

$$\begin{aligned} (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + k + 19 &= 0 \\ 9 - 18 + k + 19 &= 0 \rightarrow k = -10 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

$x^2 + mx + n + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{C}_k = \{-1, 0\}$ ise , m+n kaçtır?

$$\begin{aligned} 0 &\Rightarrow 0 + m \cdot 0 + n + 1 = 0 \rightarrow n = -1 \\ -1 &\Rightarrow 1 - m + n + 1 = 0 \rightarrow m = 1 \\ m + n &= 0 \end{aligned}$$

Örnek...4 :

$3x^2 + 6x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi

$\mathbb{C}_k = \{x_1, x_2\}$ ise $x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 + \frac{5}{3}$ ifadesinin eşiti kaçtır? kökler yerine yazılır

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 6x_1 - 2 &= 0 \rightarrow x_1^2 + 2x_1 = \frac{2}{3} \\ 3x_2^2 + 6x_2 - 2 &= 0 \rightarrow x_2^2 + 2x_2 = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5}{3} &= \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Örnek...5 :

$x^2 + 3x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesi

$\mathbb{C}_k = \{x_1, x_2\}$ ise $x_1 - \frac{1}{x_1}$ kaçtır?

$$\frac{x_1^2 - 1}{x_1} = \frac{3x_1}{x_1} = 3$$

(okun)

Hatırlatmalar

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) , (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Örnek...6 :

Denklemlerin çözümlerini araştırınız.

1) $x^2 - 9 = 0 = (x-3)(x+3) = 0$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

2) $(2+x)^2 - 9 = 0$

$$(2+x)^2 = 9 \rightarrow (2+x) = \pm 3 \rightarrow x = 1 \quad x = -5$$

3) $3x^2 - 1 = 0 \rightarrow 3x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

4) $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x-4)(x+3) = 0 \rightarrow x = 4 \quad \checkmark \quad x = -3$$

5) $5x^2 + 3 = 0$

$$4 = \emptyset$$

6) $x^2 - 4x = 0$

$$x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0 \quad \checkmark \quad x = 4$$

7) $5x^2 + 3x = 0$

$$x(5x+3) = 0 \rightarrow x = 0 \quad x = -\frac{3}{5}$$

8) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$$

9) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ (x+3)^2 &= 0 \rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER -1

DENKLEMİN ÇÖZÜM KÜMESİ

Örnek...7 :

Denklemleri tam kareye tamamlayarak çözünüz

$$1) \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$(x-2)^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow (x-2)^2 = 2 \quad |x-2| = \sqrt{2}$$

$$x-2 = \sqrt{2} \quad \vee \quad x-2 = -\sqrt{2}$$

$$x = 2 + \sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 - \sqrt{2}$$

$$2) \quad x^2 - 16x + 40 = 0$$

$$(x-8)^2 - 24 = 0 \quad |x-8| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$x-8 = 2\sqrt{6} \quad \vee \quad x-8 = -2\sqrt{6}$$

$$x = 8 + 2\sqrt{6} \quad \vee \quad x = 8 - 2\sqrt{6}$$

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER İÇİN DELTA YÖNEMİ

$ax^2 + bx + c = 0$ ise $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$ ve $\frac{b^2}{4a^2}$

terimini ekleyip çıkaralım

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \quad \text{ve buradan}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

her iki tarafın karekökü alınır

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{ve buradan}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

burada $b^2 - 4ac = \Delta$, (Δ delta, diskriminant) olarak kısaltılırsa denklemin kökleri

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olarak elde edilir.

Uyarı

$\sqrt{b^2 - 4ac}$ ifadesinin reel (gerçek) sayı belirtmesi için $b^2 - 4ac = \Delta \geq 0$ olmalıdır.

Örnek...8 :

Denklemlerin gerçek sayılarda çözüm kümelerini delta bağıntısını kullanarak çözünüz

$$1) \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad a=1, b=-4, c=-5$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{4 + 6}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

$$2) \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{64}}{2} = 5 \quad x_2 = \frac{2 - \sqrt{64}}{2} = -3$$

$$3) \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8 \quad \rightarrow 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

$$4) \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

$$5) \quad 2x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{4}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{4}$$

$$6) \quad 3x^2 + 1 = 0 \quad 3x^2 = -1$$

$$x = \emptyset$$

UYARI

$\Delta > 0$ için iki farklı kök vardır

$\Delta = 0$ için eşit iki kök vardır (çakışık, katlı kök)

$\Delta < 0$ için reel kök yoktur.

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER -1

DENKLEMİN ÇÖZÜM KÜMESİ

Örnek...9 :

$2x^2 - 10x + m = 0$ denkleminin reel kökü yoksa m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta < 0 \quad (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m < 0$$

$$100 < 8m \quad m > \frac{25}{2}$$

Örnek...10 :

$2x^2 - (m-2)x + 8 = 0$ denkleminin eşit kökleri varsa m nasıl seçilmelidir?

$$\Delta = 0 \quad [-(m-2)]^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 0$$

$$(m-2)^2 = 64 \rightarrow |m-2| = 8$$

$$m = 10 \vee m = -6$$

Örnek...11 :

$(k-2)x^2 + 2x - 12 = 0$ denkleminin farklı iki reel kökü varsa k tamsayı olarak en az kaç olur?

$$\Delta > 0 \quad 2^2 - 4 \cdot (k-2) \cdot (-12) > 0$$

$$4 + 48k - 96 > 0$$

$$48k > 92$$

$$k > \frac{92}{48} \Rightarrow k > \frac{23}{12}$$

Köklü denklemlerde çözüm araştırılırken köklü ifadeyi yalnız bırakıp kare alınarak çözüm araştırılabilir. Bulunan kök veya kökler mutaka ilk denklemden denemlidir.

Örnek...12 :

$x - \sqrt{x+3} = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$(x-3 = \sqrt{x+3})^2$$

$$x^2 - 6x + 9 = x+3 \rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0$$

$$x=1 \vee x=6$$

↓
yolunu
kök (deney)

$$G = \{6\}$$

Mutlak değerli denklemler genel yöntemlerle veya kritik nokta ile parçalanarak çözülebilir

Örnek...13 :

$|x^2 - x| = |x-1|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

Not: $|f| = |g| \Leftrightarrow f = g$
 $f = -g$

$$x^2 - x = x - 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \quad x = 1$$

$$x^2 - x = -x + 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$G = \{-1, 1\}$$

Örnek...14 :

$x^2 + |x| = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

1. yol - Kritik nokta $x=0$

$x < 0$	$x > 0$
$x^2 - x - 6 = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
$(x-3)(x+2) = 0$	$(x+3)(x-2) = 0$
$x=3$ (x)	$x=-3 \rightarrow$ dışarı
$x=-2$ (✓)	$x=2$ (✓)

$$G = \{-2, 2\}$$

2. yol $x^2 = |x|^2$

$$x^2 + |x| - 6 = 0 = |x|^2 + |x| - 6 = 0$$

$ x $	
$ x $	$+3$
$ x $	-2

$$(|x|+3)(|x|-2) = 0$$

$$|x|=2 \rightarrow x = \pm 2$$

İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER -1

DENKLEMİN ÇÖZÜM KÜMESİ

DEĞERLENDİRME

- 1) Denklemlerin reel sayılarda çözüm kümelerini bulunuz.

- $\frac{x^2}{9} - 25 = 0$ $x^2 = 225 \rightarrow x = \pm 15$
- $2x^2 - 9 = 0$ $x^2 = 9/2 \Rightarrow x = \pm 3/\sqrt{2}$
- $5x^2 + 3x = 0$ $x(x+3) \rightarrow x=0 \vee x=-3/5$
- $x^2 + (\sqrt{2}+1) + \sqrt{2} = 0$ $(x+\sqrt{2})(x+1) = 0$
 $x = -\sqrt{2}$ $x = -1$
- $2x^2 + 5x + 4 = 0$ $(2x+2)(x+2) = 0$
 $2x = -2$ $x = -1$ $x = -2$
- $(2x^2 - 8)(x^2 - 9) = 0 \rightarrow x = \pm 2, x = \pm 3$
 $x^2 = 4$ $x^2 = 9$
- $(x^2 + x - 1)(4x^2 - 12) = 0$

- 2) $ux^2 + 3x + 12 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = -3$ ise diğer kökü kaçtır?

$$u \cdot 9 - 9 + 12 = 0 \rightarrow 9u = -3$$

$$u = -1/3$$

$$x_1^2 + 5x_1 - 1 = 0$$

- 3) $x^2 + 5x - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathcal{C}_k = \{x_1, x_2\}$ ise $x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}$ kaçtır?

$$x_1^2 - 1 = -5x_1 \rightarrow x_1 - \frac{1}{x_1} = -5 \rightarrow \text{kare al!}$$

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)^2 = (-5)^2 \rightarrow x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} - 2 = 25$$

$$x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} = 27$$

- 4) $x^2 + 8x - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\mathcal{C}_k = \{m, n\}$ ise $4(m^2 + 8m)n + n^2 + 10$ kaçtır?

$$m^2 + 8m - 2 = 0$$

$$m^2 + 8m = 2$$

$$n^2 + 8n - 2 = 0$$

$$8n + n^2 + 10 = ? = 12$$

- 5) $3x^2 - ux + k = 0$ denkleminin eşit kökleri varsa k sayısının u sabiti cinsinden değeri nedir?

$$\Delta = 0 \quad (-u)^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0 \quad u^2 = 12k \rightarrow k = u^2/12$$

- 6) $x^3 + 8x^2 - (3-u)x = 0$ denkleminin üç farklı reel kökü varsa u nasıl seçilmelidir?

$$x \cdot [x^2 + 8x - (3-u)] = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

$$\{x_2, x_3\}$$

$$\Delta > 0 \rightarrow 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3+u) > 0$$

$$64 + 12 - 4u > 0$$

$$4u < 76 \rightarrow u < 19$$

- 7) $x - \sqrt{x+18} = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$x - 2 = \sqrt{x+18}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 18$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$(x-7)(x+2) = 0$$

$$x = 7 \checkmark$$

$$x = -2 \text{ (yoktur kışk)}$$

- 8) $x^2 + |x-2| = 4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

2	
$x^2 - x + 2 - 4 = 0$	$x^2 + x - 2 - 4 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$	$(x+3)(x-2) = 0$
$x = 2 \checkmark$	$x = -3 \text{ (x)}$
$x = -1 \checkmark$	$x = 2 \checkmark$

$$\mathcal{C} = \{-1, 2\}$$

- 9) $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz?

$$2^x = u$$

$$u^2 - 12u + 32 = 0$$

$$(u-8)(u-4) = 0 \rightarrow u = 2^x = 8 \quad u = 2^x = 4$$

$$x = 3 \quad x = 2$$

$$\mathcal{C} = \{2, 3\}$$

- 10) $\begin{cases} x \cdot y = 8 \\ x + y = -6 \end{cases}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz

$$y = -6 - x$$

$$x \cdot (-6 - x) = 8 \rightarrow x^2 + 6x = -8$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x + 4 \Rightarrow x = -4 \rightarrow y = -2$$

$$x + 2 \Rightarrow x = -2 \rightarrow y = -4$$

$$\mathcal{C} = \{(x,y)\} = \{(-4, -2), (-2, -4)\}$$