$x^6-1^6 = (x^3)^2-(1^3)^2 = (x^3-1^3)(x^3+1^3)$
$= (x-1)(x^2+x+1).(x+1)(x^2-x+1)$

RASYONEL İFADELER

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki ifadelere rasyonel ifade, $\frac{P(x)}{Q(x)}=0, Q(x)\neq 0$ ifadesine de rasyonel denklem denir .

Örnek...1 :

İfadeleri en sade hale getiriniz

1) $\frac{yx^4-xy^4}{x^2+xy+y^2} = \frac{xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2} =$

$= \frac{xy(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}}{\cancel{x^2+xy+y^2}} = xy(x-y)$ //

2) $\dfrac{\frac{x^4-y^4}{xy}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}} = \dfrac{\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{xy}}{\frac{y^2-x^2}{x^2.y^2}} = \dfrac{\frac{(x^2+y^2)(x-y)(x+y)}{xy}}{\frac{(y-x)(y+x)}{(xy)^2}}$

$(y^2)\ (x^2)$

$= \frac{(x^2+y^2)\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}}{\cancel{xy}} \cdot \frac{(xy)^{\cancel{2}}}{\cancel{(y-x)}\cancel{(y+x)}} = \frac{(x^2+y^2).(-1).xy}{1}$

$= -xy.(x^2+y^2)$ //

3) $\frac{x^6-y^6}{(x^2+xy+y^2).(x^2-xy+y^2)}$

$\frac{(x^3)^2-(y^3)^2}{(x^2+xy+y^2).(x^2-xy+y^2)} = \frac{(x^3-y^3).(x^3+y^3)}{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}$

$= \frac{(x-y)\cancel{(x^2+xy+y^2)}.(x+y)\cancel{(x^2-xy+y^2)}}{\cancel{(x^2+xy+y^2)}.\cancel{(x^2-xy+y^2)}} = (x-y)\ (x+y)$ //

4) $\frac{x^5-1}{x^2(x^2+x+1)+1+x}$

$= \frac{(x-1)\cancel{(x^4+x^3+x^2+x+1)}}{\cancel{x^4+x^3+x^2+1+x}} = x-1$ //

5) $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x+2}+\frac{8}{x^2-4}$

$(x+2)\quad(x-2)\quad(1)$

$= \frac{x^2+2x}{x^2-4}+\frac{2x-4}{x^2-4}+\frac{8}{x^2-4}$

$= \frac{x^2+2x+2x-4+8}{x^2-4} = \frac{x^2+4x+4}{(x-2).(x+2)}$

$= \frac{(x+2)\cancel{(x+2)}}{(x-2).\cancel{(x+2)}}$

$= \frac{x+2}{x-2}$ //

Örnek...2 :

$\frac{x^6-1}{P(x)}$ ifadesinde, P(x) başkatsayısı 1 olan bir polinom ve işlemin sonucunda elde edilen polinom 4. dereceden ise P(x) kaç farklı polinom olur

$\frac{x^6-1}{P(x)} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{P(x)} = x^4 - - -$

$P(x) \rightarrow$ 2.dereceden olmalı ki yukarıdakiyle sadeleşsin ve sonuç 4. dereceden polinom olsun.

öyleyse $P(x)=(x-1).(x+1)$
$P(x)=(x^2+x+1)$
$P(x)=(x^2-x+1)$
olabilir. 3 farklı polinom olabilir.

Örnek...3 :

$\frac{x^2-x-12}{x^2+mx+6}$ ifadesi sadeleşebiliyorsa m değerlerinin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

$\frac{(x-4)(x+3)}{x^2+mx+6}$

(x-4) sadeleşiyorsa $\frac{\cancel{(x-4)}(x+3)}{\cancel{(x-4)}.(\ ?\ )}$

x-4 aşağının katıdır.
x=4 aşağıyı sıfır yapar.
$4^2+m.4+6=0$
$4m=-22$
$m=-\frac{22}{4}=-\frac{11}{2}$

(x+3) sadeleşiyorsa $\frac{(x-4)(x+3)}{(\ ?\ )(x+3)}$

x+3 aşağının katıdır.
x=-3 aşağıyı sıfır yapar.
$(-3)^2+m(-3)+6=0$
$9-3m+6=0$
$15=3m$
$m=5$

$\left(-\frac{11}{2}\right).5=-\frac{55}{2}$ //

Örnek...4 :

$\frac{x^2-1}{x^2-x-12}=0$ rasyonel denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-4)(x+3)}=0$ ise $(x-1).(x+1)=0$

$x-1=0$ $\quad x+1=0$
$x=1$ $\quad x=-1$

$ÇK=\{-1,1\}$ //

Örnek...5 :

$\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}=0$ rasyonel denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x+3)}=0$ ise $(x-3)(x-5)=0$

$x-3=0$ $\quad x-5=0$
$x=3$ $\quad x=5$

x=3 paydayı sıfır yaptığından iptal.

$ÇK=\{5\}$ //

Örnek...6 :

$\frac{x^6-1}{x^2+mx+3}=0$ rasyonel denkleminin çözüm kümesi reel sayılarda tek elemanlı ise m nin alabileceği farklı değer bulunuz.

x^6-1 üstte 2.örnekte çarpanlarına ayrılmıştı.

$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+mx+3}$

Bu iki ifade için $\Delta<0$ olduğundan reel kök yoktur.

Çözüm kümesi tek elemanlı ise (x-1) ve (x+1)'in bir tanesi de altta olmalı ki iki kökten tek kök düşsün.

o zaman $x^2+mx+3=(x-1).(\ ?\ )$ (x+1) dışında bişey

veya $x^2+mx+3=(x+1).(\ ?\ )$ (x-1) dışında bişey

olmalı.

$x=1$ için $1+m+3=0$
$m=-4$

$x=-1$ için $1-m+3=0$
$m=4$

$m=\{-4,4\}$ //

DEĞERLENDİRME

1) $\dfrac{x^3-(x-3)^3}{(x-2)^2+x-1}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{(x-(x-3)).(x^2+x(x-3)+(x-3)^2)}{x^2-4x+4+x-1}=$$

$$=\frac{(\cancel{x}-\cancel{x}+3).(x^2+x^2-3x+x^2-6x+9)}{x^2-3x+3}$$

$$=\frac{3.(3x^2-9x+9)}{x^2-3x+3}=\frac{3.3\cancel{(x^2-3x+3)}}{\cancel{x^2-3x+3}}$$

$$=9$$

2) $\dfrac{x^5+1}{x^4-x^3+x^2-x+1}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{(x+1).\cancel{(x^4-x^3+x^2-x+1)}}{\cancel{x^4-x^3+x^2-x+1}}=x+1$$

3) $\dfrac{a^2+(a-4)^2-2a.(a-4)}{(a-3)^2-(a-7)^2}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$=\frac{a^2-2.a.(a-4)+(a-4)^2}{[(a-3)-(a-7)].[(a-3)+(a-7)]}$$

$$=\frac{[(a)-(a-4)]^2}{[\cancel{a}-3-\cancel{a}+7].[a-3+a-7]}$$

$$=\frac{(\cancel{a}-\cancel{a}+4)^2}{(4).(2a-10)}=\frac{4^2}{4.(2a-10)}$$

$$=\frac{4^2}{2(a-5)}=\frac{2}{a-5}$$

4) $\dfrac{a^4+b^4+a^2b^2}{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}$ ifadesinin en sade hali nedir?

$$\frac{a^4+b^4+a^2b^2+a^2b^2-a^2b^2}{(a+b).(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}=\frac{a^4+b^4+2a^2b^2-a^2b^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2).(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-(ab)^2}{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{\cancel{(a^2+b^2-ab)}\cancel{(a^2+b^2+ab)}}{(a+b)\cancel{(a^2-ab+b^2)}\cancel{(a^2+ab+b^2)}}=\frac{1}{a+b}$$

5) $\dfrac{x^3-6x^2+8x}{x^2-x-6}=0$ rasyonel denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{x(x^2-6x+8)}{x-x-6}=0 \qquad \begin{matrix}-4 & -2\end{matrix} \qquad \begin{matrix}-3 & +2\end{matrix}$$

$$\frac{x(x-4)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=0$$

$x(x-4).(x-7)=0$ olmalı.

$x=0$ $\quad x-4=0$, $x=4$ $\quad x-7=0$, $x=2$

$ÇK=\{0,2,4\}$

6) Q(x) n. dereceden bir polinom olmak üzere $\dfrac{Q(x)}{3x^2+px+12}=0$ rasyonel denkleminin çözüm kümesi reel sayılarda en çok n-2 elemanlı ise p nin alamayacağı kaç farklı tamsayı değeri vardır.

Q(x), n. dereceden ise en fazla "n" tane kökü vardır. Yani çözüm kümesi "n" tane elemanlıdır.
$\dfrac{Q(x)}{3x^2+px+12}=0$'ın çözüm kümesinin en çok "n-2" tane kökü varsa demek ki $3x^2+px+12$'nin iki tane kökü var ve yukarıdaki Q(x)'in n tane kökünden ikisi $3x^2+px+12$'nin iki köküyle aynı olduğu için iptal edilip "n-2" tane kökü kalıyor.
Buna göre $3x^2+px+12$'nin iki tane reel kökü olmalı. Yani $\Delta>0$ olmalı.

$p^2-4.3.12>0$

$p^2-144>0$

$p^2>144 \implies p>12$ veya $p<-12$

$ÇK=(-\infty,-12)\cup(12,\infty)$