

## POLİNOMLAR -1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### POLİNOMLAR

$n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  ve  $a_n \neq 0$  olmak üzere,  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$  ifadesine  $x$  in bir polinomu denir ve genellikle bu ifade  $P(x)$ ,  $Q(x)$  gibi bir ifadeye eşitlenerek verilir.

Örneğin  $P(x) = -2x^2 + 5x + \sqrt{5}$  ifadesi  $x$  in bir polinomudur.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_1 x + a_0$  ifadesinin polinom olması için,

1.  $x$  li terimlerinin kuvveti doğal sayı olmalıdır.
2.  $a_i$  sayıları her  $i$  sayısı için reel sayı olmalıdır

Örneğin  $P(x) = x^2 + 4x - 7$ ,  $Q(x) = -x^6 + \frac{1}{2}$ ,

$R(x) = \frac{1}{\sqrt{-2}}$  ifadeleri reel sayılar kümesinde birer polinomdur.

#### Örnek...1 :

İfadelerin polinom belirtip belirtmediğini açıklayınız

1.  $P(x) = x^9$  polinomdur
1.  $Q(x) = 8 - x^2 + \sqrt{3}$  → polinomdur
2.  $R(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x$  → polinomdur
3.  $S(x) = x^2 + \frac{4}{x} + 2$  → polinom değildir
4.  $T(x) = 4x - \sqrt{x}$  → pol. değildir.
5.  $S(x) = x^2 + \frac{4}{x^2+3} + 1$  → pol. değildir.
6.  $B(x) = 4x - x^{\frac{5}{3}}$  → pol. değildir.

#### Örnek...2 :

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 1$  polinomu için  $P(0)$  kaçtır?

$$x=0 \Rightarrow P(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

#### Örnek...3 :

$P(x+4) = x^7 + 6x^6 + 2x - 3$  polinomu için  $P(2)$  kaçtır?

$$x+4=2 \Rightarrow x=-2$$

$$P(2) = (-2)^7 + 6 \cdot (-2)^6 + 2 \cdot (-2) - 3 = 249$$

#### Örnek...4 :

$P(2x-1) = x^2$  olduğuna göre,  $P(3)+P(5)$  kaçtır?

$$2x-1=3 \Rightarrow x=2 \Rightarrow P(3)=4$$

$$2x-1=5 \Rightarrow x=3 \Rightarrow P(5)=9$$

$$P(3)+P(5)=13$$

#### Örnek...5 :

$P(x-1) = x^2 + 3x + 1$  polinomu için  $P(x)$  kaçtır?

$$x^*-1=x \rightarrow x^*=x+1 \quad (\text{ya da } x-1 \text{ in ters fonksiyonu ifade ve duba yazılır.})$$

$$P(x) = (x+1)^2 + 3(x+1) + 1 = x^2 + 5x + 5$$

#### Örnek...6 :

$P(x-1) = x^2 + 3x + 1$  polinomu için  $P(x+2)$  kaçtır?

$$x^*-1=x+2 \rightarrow x^*=x+3$$

$$P(x+2) = (x+3)^2 + 3(x+3) + 1 = x^2 + 9x + 19$$

#### Örnek...7 :

$P(x^3) = 2x^9 - 3x^6 + 1$  ise  $P(x)$  polinomu bulunuz

$$x^{*3}=x \rightarrow x^*=3\sqrt{x}$$

$$P(x) = 2(3\sqrt{x})^9 - 3(3\sqrt{x})^6 + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1$$

#### Örnek...8 :

$P(x^5) = 2x^{10} + (a-2)x^7 + (b+3)x^6 + 2x^5 + ux^3 - 7$

ise  $P(a+b)$  polinomu bulunuz

$$\text{tüm terimler } x^{5k} \text{ içermeli; } \Rightarrow \begin{cases} a-2=0 & a=2 \\ b+3=0 & b=-3 \\ u=0 & \end{cases}$$

$$P(x^5) = 2x^{10} + 2x^5 - 7$$

$$P(x) = 2x^2 + 2x - 7 \Rightarrow P(-1) = 2 - 2 - 7 = -7$$

#### Örnek...9 :

$P(x) = x^2 + 4x + 3$  polinomu için  $P(u) = u^2$  ise  $u$  kaç olabilir?

$$P(u) = u^2 + 4u + 3 = u^2 \Rightarrow 4u + 3 = 0 \Rightarrow u = -3/4$$

#### Örnek...10 :

$P(x) = ux^2 - 3x + 2$  ve  $P(1) - P(0) = 3$  ise  $u$  kaçtır?

$$P(1) = u - 3 + 2 = u - 1$$

$$P(0) = +2 \quad P(1) - P(0) = u - 1 - 2 = 3$$

$$u - 3 = 3$$

$$u = 6$$

$$\underline{u = 6}$$

## POLİNOMLAR -1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### TANIM

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$  polinomunda + veya - ile ayrılan her bir ifadeye terim,  $a_i x^i$  teriminde  $a_i$  ye terimin katsayısı,  $i$  ye ise terimin derecesi denir.

En büyük dereceli terimin derecesine polinomun derecesi ve bu terimin katsayısına da polinomun başkatsayısı denir.

$P(x)$  polinomunun derecesi  $\text{der}(P(x))$  ile gösterilir.

#### Örnek...11 :

Polinomların başkatsayısını ve derecelerini yazınız.

	Ancak	Bazı
1. $R(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x$	2	$\frac{1}{5}$
2. $Q(x) = 8 - x^2 + \sqrt{3}$	2	-1
3. $S(x) = x^2 + 4 - 2x^3$	3	-2
4. $T(x) = 4x - \sqrt{3}$	1	4
5. $S(x) = 1$	0	1
6. $B(x) = 0$	-	-

#### Örnek...12 :

$P(x) = x^m + 4x^{\frac{m-2}{5}} - 7$  polinomunun derecesi en çok kaçtır?

$$m=1 \Rightarrow P(x) = x^2 + 4x - 7$$

$$m=4 \Rightarrow P(x) = x^5 + 4x^2 - 7$$

$\text{der}[P(x)]_{\max} = 20$  diğer  $m$  değerlerini deneyelim.

#### Örnek...13 :

$P(x) = x^m + 4x^{\frac{m-150}{120}} - 7$  polinomunun derecesi kaç farklı değer alır ?

$m$  hem 120 hem 150'yi bönen

$$\Rightarrow m \text{ 30'ü bönenli}$$

$m = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

der 150'ye 5 (8 değer)

#### SABİT TERİM VE KATSAYILAR TOPLAMI

Bir polinomda katsayılar toplamını bulmak için bilinmeyen yerine 1, sabit terimi bulmak için bilinmeyen yerine 0 yazarız.

Örneğin  $A(x) = 4x - x^2 + 5$  polinomunda  $x=0$  yazarak sabit terimi 5,  $x=1$  yazarak katsayılar toplamını 8 olarak buluruz. Burada  $x=0$  ile  $A(0)$  sabit terimi  $x=1$  ile  $A(1)$  katsayılar toplamını verir.

Fakat  $B(x+2) = x^3 + 5x - 3$  polinomunda  $x=0$  yazarak sabit terimi  $B(2) = -3$ ,  $x=1$  yazarak katsayılar toplamını  $B(3) = 3$  olarak buluruz.

#### Örnek...14 :

$P(x) = (x^2 + 3x + 6)^2$  polinomunun katsayılar toplamı ile sabit terimini bulunuz.

$$x=1 \Rightarrow \text{katsayı toplamı } P(1) = (1+3+6)^2 = 100$$

$$x=0 \Rightarrow \text{sabit terim } P(0) = (6)^2 = 36$$

#### Örnek...15 :

$P(x) = mx^2 + x + m + 2$  polinomunun katsayılar toplamı ile sabit terimi toplamı 5 ise  $m$  kaçtır?

$$x=0 \Rightarrow m+2$$

$$x=1 \Rightarrow m+1+m+2$$

$$3m+5 = 5 \Rightarrow m=0$$

#### Örnek...16 :

$P(x+2) = 3x^2 - 2x + 1$  polinomu veriliyor  $P(x+1)$  polinomunun sabit terimi kaçtır?

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{x=0} P(1) \\ & \xrightarrow{x=-1} P(-1) \end{aligned}$$

$$x+2=1 \Rightarrow x=-1$$

$$P(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2 + 1 = 6$$

#### Örnek...17 :

$(x+2)P(x) = (x^3 + m)$  ise  $P(x)$  polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?  $x=1$   $P(1)$

$$x=-2 \Rightarrow 0 = -8 + m \Rightarrow m=8$$

$$x=1 \Rightarrow 3 \cdot P(1) = (m+1) \rightarrow P(1) = 3$$

## POLİNOMLAR -1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### Örnek...18 :

$A(x-3)=3x-7$  polinomu veriliyor için  $A(x-1)$  polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

$$x=1 \Rightarrow A(0)=? \quad x-3=0 \quad x=3$$

$$A(0) = 3 \cdot 3 - 7 = 9 - 7 = 2$$

#### Örnek...19 :

$K(x-1)=ax^2+3x+2$  polinomu veriliyor ise  $K(x+2)$  polinomunun katsayılar toplamı 62 ise a kaçtır?

$$x=1 \Rightarrow K(3)=62$$

$$x=4 \Rightarrow K(3) = 16a + 12 + 2 = 62$$
$$16a = 48 \Rightarrow a = 3$$

### TEK VE ÇİFT DERECELİ KATSAYILAR TOPLAMI

$P(x)$  polinomu verildiğinde  $\frac{P(1)+P(-1)}{2}$  ile çift dereceli katsayılar toplamı bulunur.

$P(x)$  polinomu verildiğinde  $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$  ile çift dereceli katsayılar toplamı bulunur.

#### Örnek...20 :

$P(x)=(x^2+2x-4)^2$  polinomunun tek dereceli terimler toplamı kaçtır?

$$P(1) = (1+2-4)^2 = 1$$

$$P(-1) = (1-2-4)^2 = 25$$

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2} = \frac{1-25}{2} = -12$$

#### Örnek...21 :

$A(x)=(x^3-4)^2$  polinomunun çift dereceli terimler toplamı kaçtır?

$$A(1) = (1-4)^2 = 9$$

$$A(-1) = (-1-4)^2 = 25$$

$$\frac{9+25}{2} = 17$$

#### Örnek...22 :

$P(x)$  polinomu için  $P(x) + P(x^2) = 2x^2 + mx + 4$  eşitliği veriliyor.  $P(x)$  polinomun çift dereceli katsayılar toplamı 5, ise m kaçtır?

$$x=-1 \Rightarrow P(-1) + P(1) = 2 - m + 4 = 6 - m$$

$$\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{6-m}{2} = 5$$

$$6-m=10 \rightarrow m=-4$$

### SABİT POLİNOM VE SIFIR POLİNOM

$P(x)=c, c \neq 0$  polinomuna sabit polinom denir.

#### Örnek...23 :

$P(x)=\sin^2x + \cos^2x - 7$  polinomu sabit polinomdur.

$$P(x) = 1 - 7 = -6$$

$P(x)=c, c \neq 0$  sabit polinomunun derecesi 0 dir.

#### Örnek...24 :

$A(x)=(k-4)x^2 + (m+2)x - m + k + 3$  polinomu sabit polinom ise  $A(m^k)$  kaçtır?

$$k-4=0 \quad m+2=0 \quad A(x) = 2+4+3 = 9$$
$$k=4 \quad m=-2 \quad A(x) = 9$$

$P(x)=0$  sabit polinomuna sıfır polinom denir  
Sıfır polinomun derecesi yoktur

#### Örnek...25 :

$P(x) = (m-3)x^8 - (k+1)x^{24} + c-2$  polinomu 0 polinom ise  $m+k+c=?$

$$m-3=0 \quad k+1=0 \quad c-2=0$$
$$m=3 \quad k=-1 \quad c=2$$

$$P(x) = 0$$

## POLİNOMLAR -1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### POLİNOMLARIN EŞİTLİĞİ

P(x) ve Q(x) eşit dereceli iki polinom ve bu iki polinomdaki eşit dereceli terimlerin katsayıları da eşit ise bu polinomlar eşittir denir ve  $P(x) = Q(x)$  yazılır.

#### Örnek...26

$$P(x) = 7x^2 + (k+3)x + 9$$

$$Q(x) = (n+3)x^2 + 4x + m - 2$$

polinomları eşit polinomlar olduğuna göre,  $m+k+n$  kaçtır ?

$$7 = n + 3 \rightarrow n = 4$$

$$k + 3 = 4 \rightarrow k = 1$$

$$m - 2 = 9 \rightarrow m = 11$$

$$\begin{array}{r} + \\ \hline m+k+n = 16 \end{array}$$

#### Örnek...27 :

$(x+3)(x^2+m) = x^3 + kx^2 + (n+2)x - 24$  ise,  $m+k-n$  kaçtır?

$$x^3 + mx + 3x^2 + 3m = x^3 + kx^2 + (n+2)x - 24$$

$$k=3, m=n+2, 3m=-24$$

$$m=-8$$

$$-8 + 3 - (-10) = 5$$

#### Örnek...28 :

Her  $x$  reel sayısı için,  
 $ax^3 + bx^2 + x + 4 = (x^2 - 4)(mx + n)$   
olduğuna göre,  $a.b$  çarpımı kaçtır?

$$x=2 \Rightarrow 8a + 4b + 6 = 0$$

$$-8a + 4b + 2 = 0$$

$$8b + 8 = 0 \quad b = -1$$

$$8a - 4 + 6 = 0$$

$$8a = -2$$

$$a = -1/4$$

$$a.b = 1/4$$

#### Örnek...29 :

$$\frac{3x-1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \text{ ise } A+B \text{ kaçtır?}$$

$$3x-1 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$x=2 \Rightarrow 5 = 4A \Rightarrow A = 5/4$$

$$x=-2 \Rightarrow -7 = -4B \Rightarrow B = 7/4$$

$$A+B = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = 3$$

#### Örnek...30 :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$Q(x) = (x+3)^2$$

$P(x+1) = Q(x-1)$  ise  $a+b+c$  kaçtır?

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = (x-1+3)^2$$

$$a(x+1)^2 + b(x+1) + c = (x+2)^2$$

$$x=0 \Rightarrow a+b+c = 4$$

#### Örnek...31 :

$P(x)$  bir polinomu için

$$P(x+1) = x^2 + mx + n$$

$P(x-1) = x^2$  ise  $P(m+n+1)$  kaçtır?

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x+2 \\ P(x+1) = (x+2)^2 = x^2 + mx + n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ x^2 + 4x + 4 = x^2 + mx + n \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 4 \end{array}$$

$$P(4+4+1) = P(9) = ?$$

$$P(x-1) = x^2$$

$$P(9) = 10^2 = 100$$

## POLİNOMLAR -1

### TEMEL KAVRAMLAR

#### DEĞERLENDİRME

- 1)  $P(x^3) = 5x^{12} + 2x^9 + (a-2)x + 13$  polinomu için  $P(a)$  kaçtır?

$$(x^3)^k \text{ lı terimler kalır} \Rightarrow a=2$$

$$P(x^3) = 5x^{12} + 2x^9 + 13$$

$$P(x) = 5x^4 + 2x^3 + 13$$

$$P(2) = 5 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3 + 13 \\ = 20 + 16 + 13 = 49/m$$

- 2)  $P(x) = x^{\frac{20}{m+1}} + 4x^{\frac{m+2}{2}} + m$  polinomunun derecesi en çok kaçtır?

$$m=0 \Rightarrow P(x) = x^{20} + 4x^1$$

$$\text{der } P(x) = 20$$

- 3)  $P(x-1) = x^2$  olduğuna göre,  $P(x) + P(x+1)$  polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?

$$x=1 \Rightarrow \text{istenen } P(1) + P(2)$$

$$x=2 \Rightarrow P(1) = 4$$

$$x=3 \Rightarrow P(2) = 9$$

$$P(1) + P(2) = 13$$

- 4)  $P(x) = x^2 + 5x + 1$  polinomu için  $P(x+1) - P(x-1) = 2$  ise  $x$  kaç olabilir?

$$P(x+1) - P(x-1) = (x+1)^2 + 5(x+1) + 1 - [(x-1)^2 + 5(x-1) + 1]$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 5x + 6 - x^2 + 2x - 1 - 5x + 5 - 1$$

$$= x^2 + 7x + 7 - x^2 - 3x - 2$$

$$= 4x + 5 = 2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- 5)  $P(x) = x^2 + 2x + m + 2$  polinomu için  $P(x+1)$  polinomunun sabit terimi 7 ise  $m$  kaçtır?

$$x=0 \Rightarrow P(1) = 7$$

$$x=1 \Rightarrow P(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 + m + 2 = 7 \\ m + 3 = 7 \\ m = 4$$

- 6)  $(x-3)P(x) = (x^3 + m)$  ise,  $P(0)$  kaçtır?

$$x=3 \Rightarrow 0 = 27 + m \rightarrow m = -27$$

$$(x-3) \cdot P(x) = x^3 + (-27)$$

$$x=0 \Rightarrow -3P(0) = -27 \Rightarrow P(0) = \frac{9}{3}$$

- 7) Her  $x$  reel sayısı için,  $mx^3 + nx^2 + x + 1 = (x^2 - 1)(vx + p)$  olduğuna göre,  $v+p$  toplamı kaçtır?

$$x=1 \Rightarrow m+n+2=0 \\ x=-1 \Rightarrow -m+n=0 \quad \begin{cases} m+n+2=0 \\ -m+n=0 \end{cases} \Rightarrow m=n=-1$$

$$-x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 - 1)(vx + p) \\ = vx^3 + px^2 - vx - p$$

$$v = -1 \quad p = -1$$

$$v+p = -2$$

- 8)  $P(x)$  bir polinomu için

$$P(x+1) = x^2 + ax + b$$

$$P(x-1) = x^2 \text{ ise } P(ax)$$
 polinomunun başkatsayısı kaçtır?

$$x=1 \Rightarrow P(0) = 1 \quad \rightarrow \quad x=-1 \Rightarrow 1 - a + b = 1$$

$$x=2 \Rightarrow P(1) = 4 \quad \rightarrow \quad x=0 \Rightarrow 0 + b = 4 \rightarrow b=4$$

$$a = b = 4$$

$$P(x-1) = x^2$$

$$P(x) = (x+1)^2$$

$$P(4x) = (4x+1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$$

başkatsayı 16