

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

DİZİLER

Tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan her fonksiyona dizi denir.

Örneğin $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = n^2$ ifadesi bir dizi belirtir.

Diziler değer kümelerine göre adlandırılırlar.

Dizinin değer kümesi reel sayılar ise, diziyeye reel sayı dizisi denir.

Dizi genel olarak $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, tanım kümesi; $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ve görüntü kümesi;

$f(\mathbb{Z}^+) = \{f(1), f(2), f(3), f(n), \dots\}$ dir.

Diziler genellikle, $f(n)$ yerine (a_n) , (b_n) , (x_n) şeklinde gösterilir.

Örneğin $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = n^2$ dizisini $(a_n) = (n^2)$ biçiminde veya $(a_n) = (1, 4, 9, \dots, n^2, \dots)$ olarak yazılabilir.

Bu dizide bazı terimler

$a_1 = 1, a_3 = 9, a_{10} = 100$

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ şeklinde yazıldığında.

a_1 dizinin birinci terimi

a_2 dizinin ikinci terimi

a_3 dizinin üçüncü terimi

a_n dizinin n inci terimi veya genel terimidir.

(kısaca $f(n) = a_n$ düşünülür)

Örnek...1 :

Genel terimi; $a_n = \frac{1}{n+1}$ olan dizi

$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n+1}, \dots\right)$ şeklinde yazılabilir.

Örnek...2 :

$(a_n) = \left(\frac{1}{n-781}\right)$ ifadesi bir dizi belirtmez çünkü

bu ifadeyi tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi değildir.

Örnek...3 :

Aşağıdaki ifadelerden hangileri bir dizinin genel terimi olabilir?

$$a_n = \frac{1}{n^2 - 200}$$

$$b_n = \tan(n^\circ) \quad n = 90 \Rightarrow b_{90} = ?$$

$$c_n = \frac{1}{n^3 - n} \quad n = 1 \Rightarrow c_1 = ?$$

$$d_n = \log_2(100 - n) \quad n = 100 \Rightarrow d_{100} = ?$$

$$e_n = \frac{\sqrt{600 - n}}{n^2 + 1}$$

$$n = 601 \Rightarrow e_{601} = ?$$

$$f_n = \sqrt[3]{n - 20}$$

küp kök içi negatif olabilir.

Örnek...4 :

Genel terimi $w_n = n^2 + 1$ olan dizinin üçüncü terimi kaçtır?

n yerine 3 yazılır.

$$w_3 = 9 + 1 \Rightarrow 10$$

Örnek...5 :

Genel terimi $r_n = n^3 - n + 2$ olan dizi için ilk üç terim toplamı nedir?

$$r_1 = 1 - 1 + 2 = 2$$

$$r_2 = 8 - 2 + 2 = 8$$

$$r_3 = 27 - 3 + 2 = 26$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{36}}$$

Örnek...6 :

Genel terimi $u_n = n!$ olan dizide 10.terim 8. terimin kaç katıdır?

$$u_{10} = 10!$$

$$u_8 = 8!$$

$$\frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

DİZİLER-1

DİZİ KAVRAMI

Örnek...7 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} n+2 & n < 10 \\ n-2 & n \geq 10 \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

$$\begin{aligned} 29 &= 9+2 = 11 \\ 28 &= 8+2 = 10 \\ 2_{10} &= 10-2 = 8 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 11 + 10 - 8 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Örnek...8 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n-3 & n \equiv 1 \pmod{2} \\ n^2+1 & n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$ olan dizi için $a_9 + a_8 - a_{10}$ kaçtır?

$$\begin{aligned} 29 &= 2 \cdot 9 - 3 = 15 \\ 28 &= 8^2 + 1 = 65 \\ 2_{10} &= 10^2 + 1 = 101 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 80 - 101 \\ &= -21 \end{aligned}$$

Örnek...9 :

Genel terimi $a_n = 2+4+6+\dots+2n$ olan dizi için

a) $a_5 = ?$ $2+4+6+8+10$
 $= 2 \cdot (1+2+\dots+5)$
 $= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} = 30$

b) $a_{10} - a_9 = ?$

$$\begin{aligned} (2+4+\dots+2 \cdot 10) - (2+4+\dots+2 \cdot 9) \\ &= 2 \cdot 10 \\ &= 20 \\ &7 \end{aligned}$$

Örnek...10 :

Genel terimi $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ olan dizi için a_{25} teriminin sondan kaç basamağı 0 dır?

$$2_{25} = 25! = 10^n \cdot A$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 5 \\ \underline{5} \\ 1 \end{array}$$

$$5+1=6$$

6

Örnek...11 :

Genel terimi $x_n = \frac{2n-3}{n+1}$ dizisinin kaçınıcı terimi $\frac{7}{4}$ olur?

$$\frac{2n-3}{n+1} = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} 8n - 12 &= 7n + 7 \\ n &= 19 \end{aligned}$$

Örnek...12 :

$(a_n) = \left(\frac{19n-n^2}{n^2+13n} \right)$ dizisinin kaç terimi pozitifdir?

$$\frac{19n-n^2}{n^2+13n} > 0$$

Daima (+)

$$\begin{array}{c} 0 \qquad 19 \\ - \quad | \quad + \quad | \quad - \end{array}$$

$$1, 2, \dots, 18 \rightarrow 18 \text{ terim}$$

Örnek...13 :

$(c_n) = \left(\frac{n^2+5n+10}{n+1} \right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır?

$$\begin{array}{r} n^2+5n+10 \quad | \quad n+1 \\ \underline{n^2+n} \\ 4n+10 \\ \underline{4n+4} \\ 6 \end{array}$$

6'yı bölmeli

$$n+4 + \frac{6}{n+1}$$

$$n = 1, 2, 5$$

3 adet

Örnek...14 :

$(p_n) = \left(\frac{n^2 - 3n + 1}{n+1} \right)$ dizisinin kaç terimi $\left(\frac{1}{2} \right)$ den küçüktür?

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n+1} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{n^2 - 3n + 1}{n+1} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\frac{2n^2 - 6n + 2 - n - 1}{2(n+1)} < 0$$

$$\frac{2n^2 - 7n + 1}{2(n+1)} < 0$$

Daima +
(6,7)
 $n_1 < 1$ n_2
+ $\frac{2n^2 - 7n + 1}{2}$ $\frac{7+1}{2}$
1, 2, 3, 4, 5, 6
6.terim

Örnek...15 :

$(b_n) = (n^2 - 4n + 13)$ dizisinin en küçük terimi nedir?

$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$

$n = 2 \Rightarrow b_2 = 4 - 8 + 13 = 9$

Örnek...16 :

$(b_n) = (9 - n^2 - 7n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

$r = \frac{-(-7)}{-2} = -3,5$

$n \in \mathbb{N}$ olmak
 $n = 1 = b_1 = 9 - 1 - 7 = 1$

Örnek...17 :

$(b_n) = (13 - n^2)$ dizisinin en çok kaç terimi $(-20, 20)$ arasındadır?

$-20 < 13 - n^2 < 20$

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Örnek...18 :

Genel terimi $a_n = \begin{cases} 2n & n \text{ tek} \\ 2n-1 & n \text{ çift} \end{cases}$ olan dizi için ilk 4 terim çarpımı kaçtır?

$a_1 = 2 \cdot 1 = 2$
 $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
 $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$

12. Sınıf Matematik Konu Anlatımı

$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

$2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 = 252$

Örnek...19 :

Genel terimi $d_n = 2^n \cdot (n+1)!$ olan dizide ardışık iki terimden biri diğerinin 12 katıdır. Bu terimlerden küçük olanı kaçtır?

$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 12 = \frac{2^{n+1} \cdot (n+2)!}{2^n \cdot (n+1)!} \Rightarrow 2 \cdot (n+2) = 12$
 $n = 4$

$d_4 = 2^4 \cdot 5! = 16 \cdot 120 = 1920$

İNDİRGEMELİ DİZİ

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanan dizilere indirgemeli dizi denir. Bu elemanlar arasındaki bağıntıya da indirgeme bağıntısı denir.

Örnek...20 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{2n+1} - a_{2n-1} = n$ bağıntısı var ve $a_1 = 9$ ise a_7 kaçtır?

$n = 1 \Rightarrow a_3 - a_1 = 1$
 $n = 2 \Rightarrow a_5 - a_3 = 2$
 $n = 3 \Rightarrow a_7 - a_5 = 3$

$a_7 - a_1 = 6$
 $a_7 = 15$

Örnek...21 :

Uygun şartlarda tanımlı (a_n) dizisinin elemanları arasında $a_{n+1} = \frac{4 \cdot a_n + 5}{4}$ bağıntısı

var ve $a_1 = \frac{1}{4}$ ise a_{31} kaçtır?

$a_{n+1} = a_n + \frac{5}{4}$
 $a_{n+1} - a_n = \frac{5}{4}$
 $a_2 - a_1 = \frac{5}{4}$
 $a_3 - a_2 = \frac{5}{4}$
 $\vdots$
 $a_{31} - a_{30} = \frac{5}{4}$

$a_{31} - \frac{1}{4} = \frac{150}{4}$
 $a_{31} = \frac{151}{4}$

$a_{31} - a_1 = \frac{30 \cdot 5}{4}$

DİZİLERİN EŞİTLİĞİ

İki dizinin eşit olması için aynı sıradaki terimleri birbirine eşit olmalıdır.
(a_n) ve (b_n) iki dizi olmak üzere her pozitif n tamsayısı için $a_n = b_n$ ise (a_n) ve (b_n) dizilerine eşit diziler denir ve bu eşitlik (a_n) = (b_n) olarak yazılır.

Örnek...22 :

(p_n) = $\left(\frac{3n+12}{n+4}\right)$ dizisi ve (k_n) = $(3 \cdot \cos 2n\pi)$ dizisi eşit dizilerdir çünkü bu dizilerin genel terimleri eşit ve 3 tür.

DİZİLERDE İŞLEMLER

1. Toplama ve Çıkarma

İki diziyi toplamak veya çıkarmak için bu dizilerin genel terimlerinde toplama ve çıkarma yapılır.

$$(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$$

2. Çarpma - Bölme

İki diziyi çarpmak için bu dizilerin genel terimleri çarpılır.

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$

İki diziyi bölmek için de bu iki dizinin genel terimleri bölünür.

$$(a_n) : (b_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right), b_n \neq 0$$

Bir diziyi sabitle çarpmak için de bu dizinin genel terimini sabitle çarpmak yeterlidir.

$$c(a_n) = (c \cdot a_n)$$

Örnek...23 :

(a_n) = $(n+2)$, (b_n) = $\left(3 - \frac{n}{2}\right)$ dizileri için istenen dizileri hesaplayınız.

$$(a_n) + (b_n) \quad n+2 + 3 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + 5$$

$$(a_n) \cdot (b_n) \quad (n+2) \cdot \left(3 - \frac{n}{2}\right) = 3n - \frac{n^2}{2} + 6 - n$$

$$= -\frac{n^2}{2} + 2n + 6$$

$$(b_n) : (a_n) \quad \frac{3 - \frac{n}{2}}{n+2} = \frac{6-n}{2n+4}$$

$$3(a_n) + 2(b_n) \quad 3n+6 + 6-n = 2n+12$$

SONLU DİZİ

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ kümesi bir p elemanlı sonlu küme olmak üzere tanım kümesi $A_p = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ olan her diziye bir p terimli sonlu dizi denir.

Örnek...24 :

$A_p = \{1, 2, 3, \dots, 100\} : f: A_p \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = a_n = n^2$ genel terimiyle verilen dizi, 100 terimli sonlu bir dizedir.

Örnek...25 :

(b_n) = $(13 - n^2)$ sonlu dizisinin tüm terimleri -100 den büyükse en küçük terimi kaçtır?

$$13 - n^2 > -100$$

$$n^2 < 113$$

$$n = 1, 2, \dots, 10$$

$$b_{10} = 13 - 10^2 = -87$$

Örnek...26 :

(a_n) = $(\sqrt{16-n})$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

$$2_{16} = \sqrt{16} \in \mathbb{R}$$

$$1, 2, \dots, 16 \rightarrow \underline{\underline{16 \text{ terim}}}$$

Örnek...27 :

(a_n) = $(\tan(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır

$$\tan 90 = ?$$

$$n = 1, 2, \dots, 89 \Rightarrow \underline{\underline{89 \text{ terim}}}$$

SABİT DİZİ

Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere sabit diziler denir.

$$(a_n) = (-2, -2, -2, -2, \dots)$$

dizisinin her terimi -2 olduğundan sabit dizedir.

Uyarı

$(a_n) = (P(n))$ yani polinom tipinde bir dizi sabitse dizide n içeren terimler varsa bu terimlerin katsayıları 0 olmalıdır.

Örnek...28 :

$(s_n) = ((3-k)n^2 + (2m+1)n - m.k + 5)$ dizisi sabit dizi ise s_{189} kaçtır?

$$\begin{aligned} 3-k &= 0 & 2m+1 &= 0 \\ k &= 3 & m &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S_n = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + 5 = \frac{13}{2}$$

Uyarı

$(a_n) = \left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)$ yani rasyonel ifade tipinde bir dizi sabitse dizide pay ve paydada n içeren terimlerin eşit dereceli olanlarının katsayıları orantılı olmalıdır.

Örnek...29 :

$(p_n) = \left(\frac{3n+15}{n+5}\right)$ dizisi sabit dizidir

Örnek...30 :

$(x_n) = \left(\frac{an+3}{n+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise a kaçtır?

$$\frac{a}{1} = \frac{3}{7} \quad a = \frac{3}{7}$$

Örnek...31 :

$(x_n) = \left(\frac{(a-2)n^2 - 2n + 4}{bn+7}\right)$ dizisi sabit dizi ise $a+b$ kaçtır?

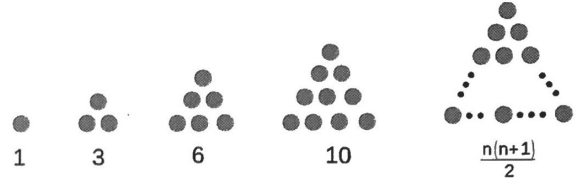
n^2 'nin katsayısı 0 olmalı

$$a=2$$

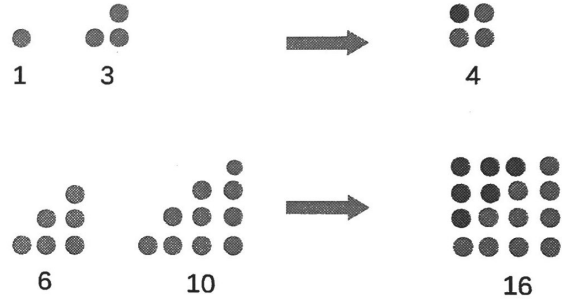
$$\frac{-2}{b} = \frac{4}{7} \quad b = -\frac{7}{2}$$

$$a+b = 2 - \frac{7}{2} = -\frac{3}{2}$$

Üçgensel sayılar: 1 den n ye kadar ardışık sayıların toplamını veren sayılara üçgensel sayılar denir.
1, 3, 6, 10, ... sayıları üçgensel sayılardır



Karesel sayılar: Ardışık 2 üçgensel sayının toplamı bir kare sayıdır.
 $1+3=4=2^2$
 $3+6=9=3^2$



Fibonacci dizisi, her sayının kendinden öncekiyle toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir.

$$F_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F(n-1)+F(n-2) & n>1 \end{cases}$$

$$F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Bu şekilde devam eden bu dizide sayılar birbirleriyle oranlandığında altın oran ortaya çıkar, yani bir sayı kendisinden önceki sayıya bölündüğünde altın orana $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ gittikçe yaklaşan bir dizi elde edilir.

DEĞERLENDİRME

1) $a_n - a_{n+1} = \frac{3}{2}$ ve $a_6 = -12$ ise a_{24} kaçtır?

$$\begin{aligned} 26 - 27 &= \frac{3}{2} & 26 - 24 &= 27 \\ 27 - 28 &= \frac{3}{2} & 24 &= -12 - 27 \\ 23 - 24 &= \frac{3}{2} & &= -39 \\ \hline 26 - 24 &= \frac{3}{2} \cdot 18 = 27 \end{aligned}$$

2) $(c_n) = \left(\frac{n^3}{n+5}\right)$ dizisinin kaç terimi tamsayıdır? (2)

$$\begin{aligned} \frac{n^3}{n+5} &= \frac{n^3 + 5n^2}{n^2 - 5n + 25} \\ &= \frac{-5n^2 - 25n}{25n} \\ &= \frac{-125}{n+5} \in \mathbb{Z} \text{ olmak} \\ n+5 &= 25, 125 \\ n &= 20 \\ n &= 120 \end{aligned}$$

$(a_n) = \left(\frac{n^3 - 9n^2 - 18n}{2n - 7}\right)$ dizisinin kaç terimi negatiftir?

$$\begin{aligned} n \cdot (n^2 - 9n - 18) &= 0 \quad 3 \quad \frac{7}{2} \quad 6 \\ &= 2n - 7 \quad + \quad \left| - \right| + \left| - \right| + \\ &= n = \frac{7}{2} \quad \left| 2 \right| \quad \left| 4, 5 \right| \\ &= \left| 2 \text{ değer} \right| \end{aligned}$$

4) $(b_n) = (\sec(n^\circ))$ sonlu dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

$$\sec(n^\circ) = \frac{1}{\cos n} \quad \cos 90 = 0$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, 89 \rightarrow \underline{89 \text{ terim}}$$

5) k bir tamsayı olmak üzere, genel terimi

$$a_n = \begin{cases} 3n & n=3k \\ 3n+1 & n=3k+1 \\ 2+3n & n=3k+2 \end{cases} \text{ olan dizisinin ilk üç}$$

terimi toplamı kaçtır?

$$a_1 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_2 = 2 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$\underline{21}$$

6) Genel terimi $(a_n) = \left(\frac{1}{n^2 + 3n + 2}\right)$ olan dizisinin ilk 10 terimi toplamı kaçtır? $(n+2)(n+1)$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ a_1 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} & a_{10} &= \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \\ a_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \frac{1}{12} &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

7) $(a_n) = ((k+2)n^3 + (2m+1)n^2 - (k \cdot m - p)n + 5)$ dizisi sabit dizi ise a_3 kaçtır?

$$\begin{aligned} k+2 &= 0 & 2m+1 &= 0 & 23 &= 5 \\ k &= -2 & m &= -\frac{1}{2} \\ -2 \cdot \frac{1}{2} - p &= 0 & 1 - p &= 0 & p &= 1 \end{aligned}$$

8) $(k_n) = \left(\frac{3n-2x}{9-2n}\right)$ dizisi sabit dizi ise x kaçtır?

$$\frac{3}{-2} = \frac{-2x}{9} \quad 6x = 27 \quad x = \frac{27}{4}$$

9) $(a_n) = (3n-2), (b_n) = \left(1 + \frac{n}{2}\right)$ dizileri için $c_n = (a_n - 4 \cdot b_n)$ dizisinin ikinci terimi kaçtır?

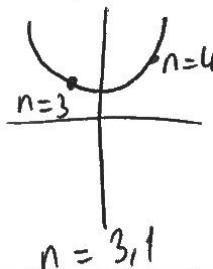
$$\begin{aligned} c_2 &= a_2 - 4b_2 \\ &= 3 \cdot 2 - 2 - 4 \cdot \left(1 + \frac{2}{2}\right) \\ &= 4 - 4 \cdot 2 = -4 \end{aligned}$$

10) $(u_n) = (24 - n^2 - 4n)$ dizisinin en büyük terimi nedir?

$$r = \frac{-(-4)}{-2} = -2$$

$$u_1 = 24 - 1 - 4 = 19$$

11) $(u_n) = (3n^2 - 19n + 7)$ dizisinin en küçük terimi nedir?



$$r = \frac{-(-19)}{2} = 9,5$$

$$\begin{aligned} u_3 &= 3 \cdot 3^2 - 19 \cdot 3 + 7 \\ &= 27 - 57 + 7 \\ &= -23 \end{aligned}$$