

ÜSTEL VE LOGARİTMİK VE MODELLEME

Bileşik faiz, bir faiz döneminde kazanılan faizin ana paraya ilave edilerek her devre değişen ana para üzerinden hesaplanır. Örneğin bir kişi 100 TL yıllık %10 üzerinden faize yatırdığında

1. yıl sonu $100 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110$

2. yıl sonu $110 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 121$

TL paraya sahip olur.

Bu ifadeyi $A + f = A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t$ biçiminde modelleyebiliriz.

Jakob Bernoulli, e sabitini birleşik faiz problemini incelerken keşfetmiştir

Elinde 1 ₺ sı olan bir yatırımcı parasını yılda %100 faiz veren bir bankaya yatırırsa 1 sene sonra 2 ₺;

6 ayda bir %50 faiz veren bir bankaya yatırırsa 1 sene sonra 2,25 ₺;

3 ayda bir %25 faiz veren bir bankaya yatırırsa 1 sene sonra 2,44 ₺;

ayda bir % 8,33 faiz veren bir bankaya yatırırsa 1 sene sonra 2,61 ₺;

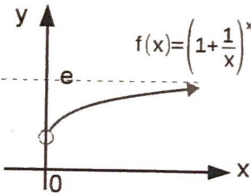
Her gün işleyen faiz veren bir bankaya günlük (100/360 lık faizle) yatırırsa 1 sene sonra 2,714516 ₺ sı olur.

Bu ifade $S = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ile modellenirse

(ana para 1 ₺) faizin işleme süresi uzadıkça, yıl sonundaki para 2 ve 3 arasında belli bir değere (2,714516 şeklinde devam eden irrasyonel bir sayıya) yaklaşmaktadır.

Tablodan da görüldüğü üzere yakınsanan değer e (Euler sabiti) sayısıdır.

x		x	
1	2	-2	4
10	2,5937..	-10	2,8679..
10 ²	2,7048..	-10 ²	2,7319..
10 ⁶	2,7182..	-10 ⁶	2,7182..



Örnek...1 :

Yıllık faiz oranı n, yıllık faizin uygulanacağı yıl sayısı t olmak üzere, A ₺, t yıl sonra bankaya yatırılırsa faiziyle birlikte

$$A \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right)^t \text{ ₺ olarak elde ediliyor.}$$

Buna göre yıllık %20 faiz oranıyla bankaya yatırılan 360 ₺ 2 yılda ne kadar faiz getirir?

$$360 \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 - 360$$

$$360 \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{120}{100} - 360$$

$$\frac{36 \cdot 144}{10} - 360 = 158,4$$

Örnek...2 :

Okyanus Coğrafyası alanında yapılan araştırmalar, bir plajdaki eğim m, kum taneciklerinin ortalama çapı d (mm cinsinden) olmak üzere plaj eğimi ve kum tanecikleri arasında $m = 0,118 \cdot \log(d) + 0,159$ ilişkisi olduğunu söylemektedir. Buna göre kum taneciklerinin çapının ortalama 0,1 mm olduğu bir plajın eğimi kaçtır?

$$\begin{aligned} m &= 0,118 \cdot \log d + 0,159 \\ &= 0,118 \cdot \log(0,1) + 0,159 \\ &= -0,118 + 0,159 \\ &= 0,041 \end{aligned}$$

Örnek...3 :

Bir bakteri türünde nüfus her saat 2 katına çıkmaktadır. Buna göre kaç saat sonra nüfus başlangıcın 100 katına çıkar

$$\begin{array}{ccccccc} x & 2x & 4x & \dots & n \text{ t/saat son} \\ 2^0 x & 2^1 x & 2^2 x & \dots & 2^n x \end{array}$$

$$2^n x = 100 x$$

$$2^n = 100$$

$$n = \log_2 100 = 6,6438 \dots$$

$$n+1 = 7,64 \dots$$

Örnek...4 :

a mikron türünden deprem dalgasının genişliği, T saniye türünden deprem dalgasının gerçekleşme süresi, B depremin kaydedildiği rasathaneye bağlı bir sabit değer olmak üzere bir depremin şiddeti

$$R = \log\left(\frac{a}{t}\right) + B \text{ richter olarak}$$

hesaplanmaktadır.

B=5 için a=280 mikron ve T=3,6 saniye ile kaydedilen depremin şiddeti kaçtır?

$$R = \log\left(\frac{280}{3,6}\right) + 5 = 6,890 \dots$$

Örnek...5 :

Ses şiddeti (I) bir ses kaynağının sesin yayılma doğrultusuna dik 1 m² yüzeyde bir saniyede yaydığı enerjidir.

Ses gücü, $L = 10 \cdot \log(I \cdot 10^{12})$ olarak tanımlanır. (birimi desibeldir -dB-)

Bir düdüğün ses şiddeti 10 watt/m² ise düdüğün ses gücü nedir?

$$\begin{aligned} L &= 10 \cdot \log(10 \cdot 10^{12}) \\ &= 10 \cdot 13 \\ &= 130 \end{aligned}$$

Örnek...6 :

C: kandaki tüm kolestrol miktarı

H: kandaki lipoprotein miktarı olmak üzere bir erkeğin kalp krizine yakalanma olasılığı P,

$$P = 1,36 \cdot \ln\left(\frac{C}{H}\right) - 1,19$$

bağıntısı ile hesaplanmaktadır.

C=240 ve H=80 olan bir erkek için kalp krizi geçirmeme olasılığı kaçtır? (Kadınlarda bu

olasılık modeli $P = 2,07 \cdot \ln\left(\frac{C}{H}\right) - 2,04$

biçimindedir)

$$P = 1,36 \cdot \ln\left(\frac{240}{80}\right) - 1,19$$

$$\Rightarrow 0,304$$

$$1 - 0,304 = 0,696$$

Örnek...7 :

Herhangi bir anda tüm yaşayan canlılarda ve havada C-14'ün C-12'e orana yaklaşık olarak sabittir ve $1/10^{12}$ (trilyonda bir) değerindedir. Bir canlı öldükten sonra vücudundaki C-12 miktarı sabit kalırken, C-14 beta ışınımı nedeniyle (yarılanma ömrü 5736 yıldır) giderek azalır. Bu işıma miktarı kullanılarak canlı kalıntının yaşı öğrenilmektedir. Karbon-14 yaş tayini için aşağıdaki formül kullanılmaktadır :

$$T = \frac{\ln\left(\frac{N_r}{N_0}\right)}{-0,693} \cdot t_{1/2}$$

T tahmin edilen yaş, ln doğal logaritma, N_r / N_0 canlı kalıntındaki karbon-14 miktarının canlı dokulardaki C-14 karbon miktarına oranı, $t_{1/2}$ ise Karbon-14'ün yarı ömrüdür (5736 yıl).

Canlı bir örneğin %10'u kadar bir Karbon-14 içeren bir canlı kalıntının yaşı yaklaşık kaçtır?

$$T = \frac{\ln\left(\frac{10}{100}\right)}{-0,693} \cdot 5736$$

$$T = \frac{-\ln 10}{-0,693} \cdot 5736 = \frac{-2,302}{-0,693} \cdot 5736$$

$$= 19.058,6 \dots$$

Konu ile ilgili araştırınız

Gelenbevi İsmail Efendi, John Napier

Facebook internet sitesini kullanan kişi

sayısını modellemek için inceleyebileceğiniz

geogebra çalışma sayfası bağlantısı.