

ÜSTLÜ VE LOGARİTMALİ EŞİTSİZLİKLER
ÜSTLÜ EŞİTSİZLİKLER :

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

1) $a > 1, b < c \Leftrightarrow a^b < a^c$

2) $0 < a < 1, b < c \Leftrightarrow a^b > a^c$ biçimindedir.

UYARI

Taban 0 ile 1 arasındaysa eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat ediniz.

Örnek...1 :

$4^{3x-2} > 16^{x+1}$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir? $4x = (4, \infty)$

$2^{2(3x-2)} > 2^{4(x+1)}$

$6x - 4 > 4x + 4$

$2x > 8$

$x > 4$

Örnek...2 :

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+32}$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir? $(-4, 8)$

$x^2 - x < 3x + 32$

$x^2 - 4x - 32 < 0$

$(x-8) \cdot (x+4) > 0$

$+ \begin{array}{c} -4 \\ - \\ 8 \end{array} +$

Örnek...3 :

$\left(\frac{1}{25}\right)^{4-3x} > \left(\frac{1}{625}\right)^{x+1}$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir? $\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$

$5^{-8+6x} > 5^{-4x-4}$

$-8 + 6x > -4x - 4$

$10x > 4$

$x > \frac{2}{5}$

LOGARİTMALİ EŞİTSİZLİKLER:

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, b, c \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0, g(x) > 0$ iki fonksiyon olmak üzere,

1) $a > 1, \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

2) $0 < a < 1, \log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ biçimindedir.

UYARI

1) Taban 0 ile 1 arasındaysa eşitsizliğin yön değiştirdiğine dikkat ediniz.

2) $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ türünden eşitsizlikler

$\log_a f(x) < \log_a a^{g(x)}$ şeklinde düşünülürse çözüme gidilirken $f(x)$ ve $a^{g(x)}$ karşılaştırması kullanılabilir.

Örnek...4 :

$\log_5(3x-2) < 2$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir? $\left(\frac{2}{3}, 9\right)$

$3x-2 > 0 \quad \wedge \quad 3x-2 < 5^2$

$x > \frac{2}{3}$

$x < 9$

$\frac{2}{3} < x < 9$

Örnek...5 :

$\log_{\frac{1}{4}}(5x+4) < -3$

eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

$-\log_4(5x+4) < -3$

$5x+4 > 0$

$\log_4(5x+4) > 3$

$x > -\frac{4}{5}$

$5x+4 > 4^3$

$5x > 60 \quad x > 12$

$x > 12$

Örnek...6 :

$\log_2 \frac{x+4}{x-2} < 1$

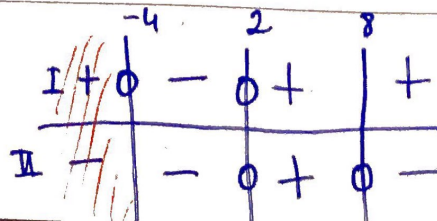
eşitsizliğin çözüm kümesi nedir?

① $\frac{x+4}{x-2} > 0$

$\frac{x+4}{x-2} < 2$

$\frac{x+4}{x-2} - 2 < 0$

$\frac{-x+8}{x-2} < 0 \quad \textcircled{2}$



Örnek...7 :

$\log(x-2) < \log(x^2-2x)$
eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$x-2 > 0 \quad \wedge \quad x^2-2x > 0$$

$$x-2 < x^2-2x \Rightarrow x^2-3x+2 > 0$$

$$(x-2) \cdot (x-1) > 0$$

	0	1	2	
$x-2$	-	-	-	+
x^2-2x	+	0	-	+
x^2-3x+2	+	+	0	+

$GK = (2, \infty)$

Örnek...8 :

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) < \log_{\frac{1}{3}}(x^3-x^2)$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$x-1 > 0, \quad x^3-x^2 > 0 \quad x-1 > x^3-x^2$$

$$x > 1 \quad x^2(x-1) > 0 \quad x^3-x^2-x+1 < 0$$

$$x^2(x-1)-(x-1) < 0$$

$$(x-1) \cdot (x^2-1) < 0$$

	-1	0	1	
x^3-x^2	-	-	+	+
x^3-x^2-x+1	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	+

$$GK = \{ \}$$

Örnek...9 :

$$\log_5(x) < \log_{25}(x^2-x)$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$x > 0 \quad \wedge \quad x^2-x > 0$$

$$\log_5 x < \frac{1}{2} \log_5 (x^2-x)$$

$$2 \log_5 x < \log_5 (x^2-x)$$

$$x^2 < x^2-x$$

$$x < 0$$

$$GK = \{ \}$$

Örnek...10 :

$$\log(x+1) + \log(x+2) < \log x^2$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$x+1 > 0 \quad x+2 > 0 \quad x^2 > 0$$

$$\log(x+1) \cdot (x+2) < \log x^2$$

$$\log(x^2+3x+2) < \log x^2$$

	-2	-1	-2/3	
$x^2+3x+2 < x^2$	-	-	+	+
$3x+2 < 0$	-	+	+	+
$3x+2$	-	-	-	+

GK

Örnek...11 :

$$5^{\log_7 x} + x^{\log_7 5} \geq \frac{2}{25} \quad x > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$5^{\log_7 x} + 5^{\log_7 x} \geq \frac{2}{25}$$

$$2 \cdot 5^{\log_7 x} \geq \frac{2}{25}$$

$$5^{\log_7 x} \geq 5^{-2} \Rightarrow \log_7 x \geq -2$$

$$x \geq \frac{1}{49}$$

$$GK = \left[\frac{1}{49}, \infty \right)$$

Örnek...12 :

$$10 \log x < \log x^9$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$x > 0$$

$$\log x^{10} < \log x^9$$

$$x^{10} < x^9 \Rightarrow x^{10} - x^9 < 0$$

$$x^9(x-1) < 0$$

	0	1	
$x^9(x-1)$	+	-	+

$GK = (0, 1)$

Örnek...13 :

$$x < \log_2 100 < y$$

eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise x+y kaçtır?

$$2^x < 100 < 2^y$$

$$x=6$$

$$y=7$$

$$x+y = \frac{13}{7}$$

Örnek...14 :

$$x < \log_{\frac{1}{5}} 675 < y$$

eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise x.y kaçtır?

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x > 675 > \left(\frac{1}{5}\right)^y$$

$$5^{-x} > 675 > 5^{-y}$$

$$x=-5$$

$$y=-4$$

$$x.y = \frac{20}{7}$$

Örnek...15 :

$$a=\log_5 60, b=\log_6 35, c=\log_{\frac{1}{7}} 28 \text{ ve } d=\ln 40$$

sayılarını sıralayınız?

$$5^2 = 60 \quad 2 < 2 < 3$$

$$6^1 = 35 \quad 1 < 2 < 2$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^c = 28 \quad c < 0$$

$$e^d = 40 \quad d > 3$$

$$\downarrow$$

2,718

$$d > 2 > b > c$$

UYARI 1

Birden büyük bir sayının 10 luk logaritmasının tam kısmı, sayının ondalık yazılımındaki tam kısmının basamak sayısından 1 eksiktir.

Örneğin $x = \log(3.585.684,2356)$ ise

7 basamak

$x=6, \dots$ biçiminde bir sayıdır. Burada virgülden öncesi hesaplanabilir ama virgülden sonrası için hazır logaritma tabloları vardır.

Genel olarak bir sayının kaç basamaklı olduğunu bulmak istiyorsak sayının logaritmasının tam kısmını bulur ve bu değere 1 ekleriz.

Örnek...16 :

25896,356 sayısının onluk logaritmasının tam kısmı nedir?

$$10^4 < 25896,356 < 10^5$$

$$\log 10^4 < \log 25896,356 < \log 10^5$$

4, ----
tam kısım 4'dür.

Örnek...17 :

$\log 2 = 0,301$ ise 2^{200} sayısı kaç basamaklıdır?

$$\log 2^{200} = 200 \cdot \log 2$$

$$= \frac{200 \cdot 301}{1000}$$

$$= \frac{602}{10} \Rightarrow 60,2$$

log tam kısmı 60 ise sayı 61 basamaklıdır.

Örnek...18 :

$\log 7 = 0,845$ ise 49^{50} sayısı kaç basamaklıdır?

$$\begin{aligned}\log 49^{50} &= \log 7^{100} \\ &= 100 \cdot \log 7 \\ &= \frac{100 \cdot 845}{1000} \Rightarrow 84,5\end{aligned}$$

tam kısım 84 ise sayı 85 basamaklıdır.

UYARI 2

0 ile 1 arasında olan bir sayının logaritmasını hesaplamak istiyorsak, bu sayının virgülden sonraki 0 dan farklı ilk rakama kadar olan 0 adetinin sayısı n tane ise logaritması alınan sayının tam kısmı $-n$ olur.

Örneğin, 0,005 sayısının logaritmasını alırsak, $\log(0,005) = -2, \dots$ yazabiliriz.

Ya da 0,005 sayısı, $10^{-3} < 0,005 < 10^{-2}$ aralığında olduğundan

$$\begin{aligned}\log 10^{-3} &< \log(0,005) < \log 10^{-2} \text{ den} \\ -3 &< \log(0,005) < -2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Örnek...19 :

0,0007 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise a.b kaçtır?

$$\begin{aligned}\log 0,0007 &= \log 7 \cdot 10^{-4} \\ \log 7 - 4 \cdot \log 10 \\ -4 + \log 7 &= -3, \dots \\ &\downarrow \\ (-4, -3) \\ a \cdot b &= 12\end{aligned}$$

Örnek...20 :

0,00001002 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise a.b kaçtır?

$$\begin{aligned}\log 1002 \cdot 10^{-8} &= \log 1002 + \log 10^{-8} \\ &= 3, \dots + -8 \\ &= -4, \dots \\ &\downarrow \\ (-5, -4) \\ a \cdot b &= 20\end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME

- 1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{243}\right)^{x+3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$3^{-6+3x} > 3^{-5x-15}$$

$$-6+3x > -5x-15$$

$$8x > -9$$

$$x > -\frac{9}{8} \Rightarrow \text{GK} = \left(-\frac{9}{8}, \infty\right)$$

- 2) $\log_2(x-2) < \log_2(x^2-2x)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir? $x, (x-2)$

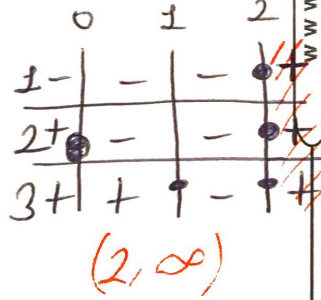
$$x-2 > 0$$

$$x^2-2x > 0$$

$$x-2 < x^2-2x$$

$$= x^2-3x+2 > 0$$

$$= (x-2)(x-1) > 0$$

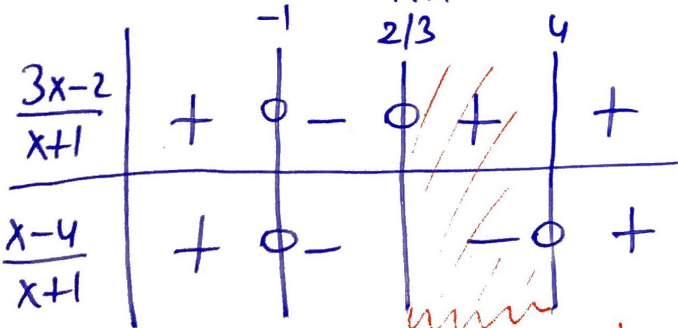


- 3) $\log_2\left(\frac{3x-2}{x+1}\right) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$\frac{3x-2}{x+1} > 0$$

$$\frac{3x-2}{x+1} < 2$$

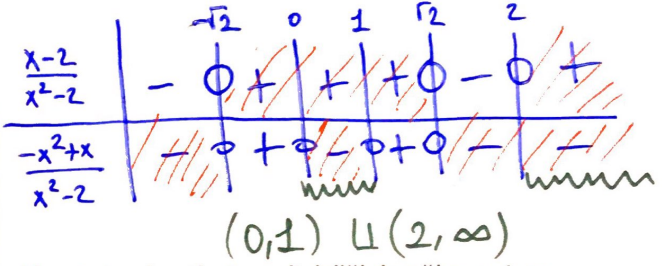
$$\frac{x-4}{x+1} < 0$$



$$\text{GK} = \left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

- 4) $\log_2\left(\frac{x-2}{x^2-2}\right) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$$\frac{x-2}{x^2-2} > 0, \quad \frac{x-2}{x^2-2} < 2^0$$



- 5) $2 < \log_3(x-2) \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

$$x-2 > 0$$

$$9 < x-2 \leq 243$$

$$x > 2$$

$$11 < x \leq 245$$

$$12+13+\dots+244 = \left(\frac{244-12}{1}+1\right) \cdot \left(\frac{244+12}{2}\right)$$

$$= 29 \cdot 824$$

- 6) $\log_{\frac{1}{7}}(x) < \log_{\frac{1}{7}}(x^2-2x-8)$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

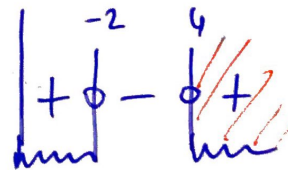
$$\log_{\frac{1}{7}} x^2$$

$$2 \cdot \log_{\frac{1}{7}} x < \log_{\frac{1}{7}} x^2-2x-8 \Rightarrow x^2 > x^2-2x-8$$

$$x > -4$$

$$x > 0 \quad x^2-2x-8 > 0$$

$$(x-4) \cdot (x+2)$$



$$x > 0 \wedge x > -4 \text{ olduğundan}$$

$$\text{GK} = (4, \infty)$$

- 7) $f(x)=\log_2(4-\ln x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

$$\begin{aligned} x > 0 \quad 4 - \ln x > 0 \\ \ln x < 4 \\ x < e^4 \\ x \in (0, e^4) \end{aligned}$$

- 8) $x < \log_7 112 < y$ eşitsizliğinde x ve y ardışık iki sayı ise $x-y$ kaçtır?

$$x < \log_7 112 < y$$

↓
 $7^2, 7^3$

$$\begin{aligned} x &< -2, \dots < y \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ -3 \quad \quad \quad -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y &= -3 - (-2) \\ &= -3 - (-2) \\ &= -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

- 9) 4545,56 sayısının onluk logaritmasının tam kısmı nedir? **3**

$$\begin{aligned} 10^3 &< 4545,56 < 10^4 \\ 3 &< \log 4545,56 < 4 \\ \underline{3, \dots} \end{aligned}$$

- 10) $\log 7 = 0,845$ ve $\log 2 = 0,301$ ise 28^{150} sayısı kaç basamaklıdır?

$$\begin{aligned} \log 28^{150} &= 150 \cdot \log 28 \\ &= 150 (2 \log 2 + \log 7) \\ &= 150 \cdot (0,602 + 0,845) \\ &= 150 \cdot 1,447 \\ &= 217,05 \\ \text{tam kısım } 217 \text{ ise sayı} \\ &218 \text{ basamaklıdır.} \end{aligned}$$

- 11) 0,00307 sayısının onluk logaritması a ve b ardışık tam sayılar olmak üzere (a,b) aralığında ise a.b kaçtır?

$$\begin{aligned} 10^{-3} &< 0,00307 < 10^{-2} \\ -3 &< \log 0,00307 < -2 \\ 2 \cdot b &= -3 \cdot -2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

- 12) $\log 3 \approx 0,477$ ise 300^{30} sayısı kaç basamaklıdır?

$$\begin{aligned} \log 300^{30} &= 30 \cdot (\log 3 + \log 100) \\ &= 30 (0,477 + 2) \\ &= 74,31 \\ \text{tam kısım } 74 \text{ ise} \\ \text{sayı } 75 \text{ basamaklıdır.} \end{aligned}$$