

LOGARİTMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

ÖZELLİK 1

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \log_a 1 = 0$$

İSPAT

$$a^0 = 1 \Rightarrow 0 = \log_a 1$$

Örnek...1 :

$$\log_a 1 = ? \quad 0$$

Örnek...2 :

$\log_{2x-3}(4a+5)=0$ ise $a+x$ tam sayı olarak en az kaçtır?

$$4a+5=1 \quad a=-1$$

$$\begin{aligned} 2x-3 > 0 & \quad 2x-3 \neq 1 \Rightarrow x+2=3+(-1) \\ x > 3/2 & \quad x \neq 2 \Rightarrow x=2 \end{aligned}$$

ÖZELLİK 2

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}, \log_a a = 1$$

İSPAT

$$a^1 = a \Rightarrow 1 = \log_a a$$

Örnek...3 :

$$\log_{20} 20 + \log_{21} 21 + \dots + \log_{57} 57 = ?$$

$$1 + 1 + \dots + 1 = 38$$

$$\frac{57-20}{1} + 1$$

$$1$$

Terim Sayısı

ÖZELLİK 3

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \text{olmak üzere,} \\ \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Örnek...4 :

$$\log 2 + \log 5 = ? \quad \log 10 = 1$$

Örnek...5 :

$$\log_{36} 2 + \log_{36} 3 + \log_{36} 6 = ? \quad \log_{36} (2 \cdot 3 \cdot 6) \Rightarrow 1$$

Örnek...6 :

$\log 2 = a, \log 3 = b$ ise $\log 6$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

$$\log 2 + \log 3 = \log 6$$

$$a + b = \log 6$$

Örnek...7 :

$\log 2 = m$ ve $\log 13 = n$ ise $\log 1040$ sayısının m ve n türünden eşiti nedir?

$$\begin{aligned} \log 1040 &= \log 10 + \log 104 \\ &= 1 + \log 13 + \log 8 \\ &= 1 + n + 3m \end{aligned}$$

Örnek...8 :

$\log 2 = a, \log 60 = b$ ise $\log 3$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

$$\log 60 = \log 10 + \log 2 + \log 3$$

$$b = 1 + a + \log 3$$

$$\log 3 = b - 1 - a$$

Örnek...9 :

$\log 2 = k$ ise $\log 5$ sayısının k türünden eşiti nedir?

$$\log 10 = \log 5 + \log 2$$

$$1 = \log 5 + k$$

$$\log 5 = 1 - k$$

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

Örnek...10 :

$\log_2 31! = k$ $\log_2 32!$ ifadesinin k türünden eşiti nedir?

$$\log_2 32! = \log_2 32 + \log_2 31!$$

$$\log_2 32! = 5 + k$$

Örnek...11 :

$\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -1$ eşitliğini sağlayan pozitif en küçük x açısı kaç derecedir?

$$\log_2 (\sin x \cdot \cos x) = -1$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

UYARI

$\sin 2x = 1$
 $x = 45^\circ$
özellik 3 ün sonucu olarak $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Örnek...12 :

$\log 2400 = a$ ve $\log 3 = b$ ise $\log 2$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

$$\log 2400 = \log 100 + \log 3 + \log 8$$

$$\log 10^2 + \log 3 + \log 2^3$$

$$2 = 2 + b + 3 \log 2$$

$$\log 2 = \frac{2-b-2}{3}$$

Örnek...13 :

$$\log_2 \sqrt[4]{16} + \log_3 \sqrt[5]{9} + \log_5 \frac{1}{25} = ?$$

$$\log_2 2^{\frac{4}{4}} + \log_3 3^{\frac{2}{5}} + \log_5 5^{-2}$$

$$\frac{4}{4} + \frac{2}{5} + -2 = \frac{35+14-70}{35}$$

Örnek...14 :

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{999}{1000} = ?$$

* tabanlar aynı olduğundan hepsini çıkarırız.

$$\log \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000} \right) = \log \frac{1}{1000}$$

$$= \log 10^{-3}$$

$$= -3$$

Örnek...15 :

$$\log_{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}} \sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\dots}}} = x$$

$$\frac{\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\dots}}}}{x} = x \Rightarrow \sqrt{12+x} = x$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{56+\sqrt{56+\sqrt{56+\dots}}} = y \Rightarrow \sqrt{56+y} = y \quad y = 8$$

$$\log_4 8 = \frac{3}{2} \cdot \log_2 2 = \frac{3}{2}$$

Örnek...16 :

$a^n = b^x$ ise $\frac{n}{m} = \frac{x}{y}$ olduğunu gösteriniz?

$\Rightarrow$ her iki tarafında 10 tabanında logaritmasını alalım

$$n \cdot \log a = x \cdot \log b \Rightarrow \text{oranlayıp}$$

$$m \cdot \log a = y \cdot \log b$$

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{y}$$

Örnek...17 :

$2^{x+1} = 5^{3+y}$ ise $y-5x$ kaçtır?

$$25^{y-2} = 4^x$$

$$5^{2y-4} = 2^{2x} \Rightarrow \text{her tarafın log'unu alırsak}$$

$$(x+1) \cdot \log 2 = (3+y) \cdot \log 5$$

$$2x \cdot \log 2 = (2y-4) \cdot \log 5$$

$$\frac{x+1}{2x} = \frac{3+y}{2y-4} \Rightarrow xy - 2x + y - 2 = 3x + xy$$

$$+2 = -5x + y$$

ÖZELLİK 4 $y-2$

$$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad x, y \in \mathbb{R}^+ \quad \log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Örnek...18 :

$\log \left(\frac{a \cdot b}{c} \right)$ ifadesinin a, b ve c nin logaritmaları türünden eşiti nedir?

$$\log \left(\frac{a \cdot b}{c} \right) = \log a + \log b - \log c$$

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

Örnek...19 :

$\log \frac{m}{n \cdot \sqrt{k}}$ ifadesini m, n ve k nin logaritmaları türünden eşiti nedir?

$$\log m - \log n - \frac{1}{2} \log k$$

Örnek...20 :

$3 \log m + 2 \log n - 4 \log k$ ifadesini tek bir sayının logaritması türünden yazınız.

$$\log m^3 + \log n^2 - \log k^4$$

$$= \log \left(\frac{m^3 n^2}{k^4} \right)$$

Örnek...21 :

$\log m - \log n = 2$ ise m sayısının n türünden eşiti nedir?

$$\log \left(\frac{m}{n} \right) = 2 \quad \frac{m}{n} = 10^2$$

$$m = 100n$$

Örnek...22 :

$3^x = 7$ ve $3^y = 63$ ise $y - x$ nedir?

$$\frac{3^y}{3^x} = \frac{63}{7} \Rightarrow 3^{y-x} = 9$$

$$y - x = 2$$

ÖZELLİK 5 (TABAN DEĞİŞTİRME ÖZELLİĞİ)

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_a b}{\log_a a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a} = \dots$$

Örnek...23 :

$\log_2 3$ sayısını 3 farklı tabanda yazınız.

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \frac{\log_e 3}{\log_e 2}$$

Örnek...24 :

$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots \cdot \log_{80} 81 = ?$

* Hepsini 10 tabanında yazalım.

$$\frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log 81}{\log 80} \Rightarrow \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81$$

$$\Rightarrow 4 //$$

Örnek...25 :

$\log_{\sqrt{2}} 5 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{49} \cdot \log_{\sqrt{7}} 256 = ?$

$$\frac{2 \cdot \log 5}{\frac{1}{2} \log 2} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \log 7}{2 \cdot \log 5} \cdot \frac{8 \cdot \log 2}{\frac{1}{5} \cdot \log 7}$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{32}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{80}{3} //$$

UYARI 1:

Taban değıştirme özelliğinin sonucu olarak $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ yazabiliriz.

Örnek...26 :

$\frac{1}{\log_2 70} + \frac{1}{\log_5 70} + \frac{1}{\log_7 70} = ?$

$$\log_{70} 2 + \log_{70} 5 + \log_{70} 7$$

$$\log_{70} (2 \cdot 5 \cdot 7) = \log_{70} 70$$

$$= 1 //$$

Örnek...27 :

$\log_p x = 4$, $\log_m x = 5$ ise $\log_{p \cdot m} x = ?$

$$\log_x p = \frac{1}{4} \quad \log_x m = \frac{1}{5}$$

$$\log_x p + \log_x m = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\log_x (p \cdot m) = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} = \frac{9}{20}$$

$$\log_{p \cdot m} x = \frac{20}{9}$$

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

UYARI 2

Taban değiştirme özelliğinin sonucu

olarak $\log_a b = \frac{1}{n} \log_a b$ yazabiliriz.

Bu ifade daha önceki özelliklerle

birleştirilerek daha genel $\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$ ifadesi yazılabilir.

Örnek...28 :

$$\log_p r = 2 \text{ ise } \log_{p^2} r^3 + \log_{p^3} r^4 + \log_{p^5} \left(\frac{1}{r^2} \right) = ?$$

$$\frac{3}{2} \cdot \log_p r + \frac{4}{3} \log_p r + \left(\frac{-2}{5} \right) \cdot \log_p r$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{-2}{5} \right) \cdot \log_p r \Rightarrow \left(\frac{15+10-4}{10} \right) \cdot 2 = \frac{21}{5}$$

Örnek...29 :

$$\log_{32} 128 + \log_{0.25} 0.125 = ?$$

$$\log_{2^5} 2^7 + \log_{2^{-2}} 2^{-3}$$

$$\frac{7}{5} + \frac{-3}{-2} = \frac{7}{5} + \frac{3}{2} = \frac{29}{10}$$

Örnek...30 :

$$\sqrt[5]{x^3} = \sqrt[4]{y^7} \text{ ise } \log_x y = ?$$

$$x^{\frac{3}{5}} = y^{\frac{7}{4}}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \log_x x = \frac{7}{4} \cdot \log_x y$$

$$\log_x y = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{4}} \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$$

Örnek...31 :

$$\log 7 = x \text{ ve } \log 11 = y \text{ ise } \log_{11} 49 \text{ x ve y türünden nedir?}$$

$$\log_{11} 49 = 2 \cdot \log_{11} 7 \Rightarrow \frac{2 \cdot x}{y}$$

$$\frac{\log 7}{\log 11} = \frac{x}{y}$$

Örnek...32 :

$$\log 3 = x \text{ ve } \log 72 = y \text{ ise } \log_{12} 6 \text{ x ve y türünden nedir?}$$

$$\log 72 = \log 8 + \log 9$$

$$= 2 \log 2 + 3 \log 3 \quad \} y$$

$$\log 2 = \frac{y - 2x}{3}$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log 6}{\log 12} = \frac{\log 2 + \log 3}{2 \log 2 + \log 3}$$

$$= \frac{\frac{y-2x}{3} + x}{2 \cdot \frac{y-2x}{3} + x} \Rightarrow \frac{\frac{y+x}{3}}{\frac{2y-x}{3}} = \frac{y+x}{2y-x}$$

Örnek...33 :

$$\log_3 5 = x \text{ ve } \log_5 7 = y \text{ ise } \log_7 3 \text{ x ve y türünden nedir?}$$

$$\log_3 5 \cdot \log_5 7 = x \cdot y$$

$$\log_3 7 = xy$$

$$\log_7 3 = \frac{1}{xy}$$

Örnek...34 :

$$\log_5 5 = x \text{ ise } \log_5 675 \text{ x türünden nedir?}$$

$$\log_5 675 = \log_5 27 \cdot 25$$

$$= \log_5 5^2 + \log_5 3^3$$

$$= 2 + 3 \cdot \log_5 3$$

$$= 2 + 3 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{x}$$

LOGARİTMA-2
ÖZELLİKLER

$$\log_3 3 + \log_3 2 + \log_3 5 = m \quad \begin{matrix} 2 \cdot \log_3 5 = n \\ \log_3 5 = \frac{n}{2} \end{matrix}$$

Örnek...35 :

$\log_3 30 = m$ ve $\log_3 25 = n$ ise $\log_6 450$ m ve n türünden nedir?

$$\log_6 450 = \frac{\log_3 450}{\log_3 6} = \frac{\log_3 3^2 + \log_3 5^2 \cdot 2}{\log_3 3 + \log_3 2}$$

$$\Rightarrow \frac{2 + 2 \cdot \log_3 5 + \log_3 2}{1 + \log_3 2} \quad \begin{cases} 1 + \log_3 2 + \frac{n}{2} = m \\ m - \frac{n}{2} - 1 = \log_3 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2 + 2 \cdot \frac{n}{2} + (m - \frac{n}{2} - 1)}{1 + m - 1 - \frac{n}{2}} = \frac{1 + \frac{n}{2} + m}{m - \frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2m + n + 2}{2m - n}$$

ÖZELLİK 6

i) $a^{\log_a b} = b$

ii) $a^{\log_a c} = c^{\log_a a}$

Örnek...36 :

$$3^{\log_3 4} + 6^{\log_3 7} = ?$$

$$4 + 7 = 11$$

Örnek...37 :

$$7^{\log_7 5} + 25^{\log_7 2} + \sqrt{7^{\log_7 16}} = ?$$

$$5 + 4 + 4$$

$$= 13 //$$

Örnek...38 :

$$e^{\ln 9} + 3^{2 + \log_3 5} = ?$$

$$e^{\log e^9} + 3^2 \cdot 3^{\log_3 5}$$

$$= 9 + 9 \cdot 5$$

$$= 54$$

Örnek...39 :

$$e^{2 \ln 5} + 9^{1 + \log_3 4} = ?$$

$$e^{\ln 25} + 3^2 \cdot 3^{2 \log_3 4} \quad \log_3 16$$

$$25 + 9 \cdot 16$$

$$\Rightarrow 25 + 144 = 169$$

$$\tan x \cdot \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$$

LOGARİTMA-2 ÖZELLİKLER

DEĞERLENDİRME

1) $\ln \tan x + \ln \cot x = ?$

$$\ln(\tan x \cdot \cot x)$$

$$\Rightarrow \ln 1 = 0$$

2) $\log_2 \sec x + \log_2 \csc x = \frac{1}{2}$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif x açısı kaç derecedir?

$$\log_2(\sec x \cdot \csc x) = \frac{1}{2}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sqrt{2}$$

$$AK = \emptyset$$

3) $\log 13 = a$, $\log 2 = b$ ise $\log 1352$ sayısının a ve b türünden eşiti nedir?

$$\begin{array}{r|l} 1352 & 2 \\ 676 & 2 \\ 338 & 2 \\ 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \log 2^3 \cdot 13^2 \\ 3 \log 2 + 2 \log 13 \\ 3b + 2a \end{aligned}$$

4) $\log_{36} 2 \cdot \log_{36} 3 = p$ ise $\log_{36}^2 2 + \log_{36}^2 3$ ifadesinin p türünden eşiti nedir?

$$\log_{36} 2 + \log_{36} 3 = \log_{36} 6 \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\log_{36}^2 2 + \log_{36}^2 3 + 2 \log_{36} 2 \cdot \log_{36} 3 = \frac{1}{4}$$

$$\log_{36}^2 2 + \log_{36}^2 3 = \frac{1}{4} - 2p$$

5) $\frac{1}{4} \log m + \frac{2}{3} \log n - \log k$ ifadesini tek bir sayının logaritması türünden yazınız

$$\log m^{\frac{1}{4}} + \log n^{\frac{2}{3}} - \log k^{-1}$$

$$\log \left(\frac{\sqrt[4]{m} \cdot \sqrt[3]{n^2}}{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \log 18 &= 2 \log 3 + \log 2 \\ y &= 2a + \log 2 \\ \log 2 &= y - 2a \end{aligned}$$

6) $\log 3 = a$ ve $\log 18 = y$ ise $\log_{72} 12$ a ve y türünden nedir?

$$\log_{72} 12 = \frac{\log 12}{\log 72} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{3 \log 2 + 2 \log 3}$$

$$\Rightarrow \frac{2(y-2a) + a}{3(y-2a) + 2a} = \frac{2y-3a}{3y-4a}$$

7) $\sqrt{\log^2 3 + \log 90} = \log x$ ise x kaçtır?

$$\sqrt{\log^2 3 + 1 + 2 \log 3} = \log x$$

$$\sqrt{(\log 3 + 1)^2} =$$

$$\log 3 + \log 10 = \log x \xrightarrow{\log 30} x = 30$$

8) $\log_{(\sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x^7} \dots)} (\sqrt[5]{x^2}) = ?$

$$\sqrt[7]{x^7 \sqrt{x^7} \dots} = y$$

$$x^7 \cdot y = y^2 \rightarrow y = x^7$$

$$\log_{x^7} x^{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{7} = \frac{2}{32}$$

9) $\log 3 = x$, $\log 4 = n$ ise $\log_{20} 30$ sayısını x ve n cinsinden ifade ediniz?

$$\log_{20} 30 = \frac{\log 30}{\log 20} = \frac{\log 3 + 1}{\log 2 + 1}$$

$$= \frac{x+1}{\frac{n}{2}+1} = \frac{2x+2}{n+2}$$

10) $e^{2 \ln(2x-3)} = 4$ x kaç olabilir?

$$e^{\ln(2x-3)^2} = 4$$

$$(2x-3)^2 = 2^2$$

$$2x-3 = 2$$

$$2x-3 = -2$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{1}{2}$$

6/6

$$\text{olur } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

olmaz