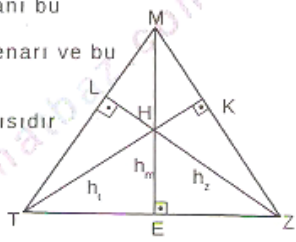


ÜÇGENDE ALAN-9

ÜÇGENDE ALAN BAĞINTILARI

Bir üçgenin alanı bu üçgenin herhangi bir kenarı ve bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısıdır

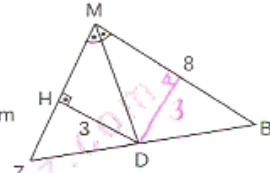


Üçgenin yükseklikleri tek noktada kesişir. Bu nokta diklik merkezidir. Merkez üçgensel bölgeye ait olmayabilir.

$$A(MTZ) = \frac{m \cdot h_m}{2} = \frac{z \cdot h_z}{2} = \frac{t \cdot h_t}{2}$$

Örnek...1 :

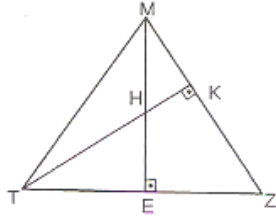
MBZ bir üçgendir. $|HD|=3br$, $|MB|=8br$, $|MD|$, M açısının açıortayı olduğuna göre $A(MDB)$ kaç birim karedir?



$$A(MDB) = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12br^2$$

Örnek...2 :

MTZ bir üçgen. $|TK|=6br$, $|MZ|=12br$, $|ME|=8br$ ise $|TZ|$ kaç birimdir?

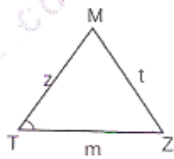


$$A(MTZ) = \frac{6 \cdot 12}{2} = \frac{8 \cdot TZ}{2}$$

$$TZ = 9$$

Sinüslü alan bağıntısı

$$A(MTZ) = \frac{m \cdot z \cdot \sin(\widehat{T})}{2}$$



$$A(MTZ) = \frac{m \cdot t \cdot \sin(\widehat{Z})}{2} = \frac{t \cdot z \cdot \sin(\widehat{M})}{2}$$

Örnek...3 :

MTZ bir üçgendir. $|MT|=8\sqrt{2}br$, $|TZ|=6br$, $m(\widehat{T})=45^\circ$ ise bu üçgenin alanı kaç birim karedir?

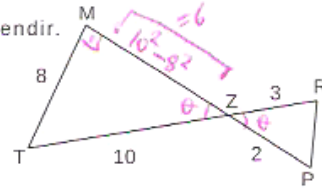


$$A(MTZ) = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 24br^2$$

Örnek...4 :

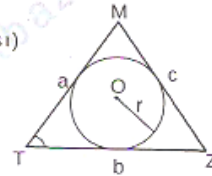
MTZ bir dik üçgendir.

$|TR| \cap |MP| = |Z|$, $m(\widehat{M})=90^\circ$ verilen uzunluklara göre $A(PRZ)$ kaç birim karedir?



$$A(PRZ) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{8}{10} = \frac{12}{5} \text{ birim kare}$$

Heron bağıntısı (u'lu alan bağıntısı)



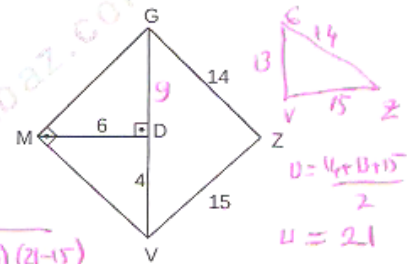
$$u = \frac{a+b+c}{2} \text{ olmak üzere}$$

$$A(MTZ) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$

ayrıca $A(MTZ) = u \cdot r$ (r iç teğet çemberin yarıçapıdır)

Örnek...5 :

MTZ bir üçgen $m(\widehat{GMV}) = m(\widehat{MDG}) = 90^\circ$, $|DV|=4br$, $|MD|=6br$ dir. $|GZ|+1=|ZV|=15br$ ise $A(GVZ)$ kaç birim karedir?



$$|GD|^2 = 36 - (6-1)^2 = 9$$

$$A = \sqrt{21 \cdot (21-3) \cdot (21-4) \cdot (21-15)}$$

$$A = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}$$

$$A = 84 \text{ birim kare}$$

ÜÇGENDE ALAN-9

TMZ dik üçgen ise
 $A(TMZ) = \frac{|TM| \cdot |MZ|}{2}$

Ayrıca iç teğet çemberin hipotenüsten ayırdığı parçalar x ve y ise
 $A(TMZ) = x \cdot y$

MTZ üçgen ise
 O bu üçgenin çevrel çemberi ise
 $A(MTZ) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

Örnek...6 :
 MTZ bir üçgendir.
 $|MT|=6br, |MZ|=11br, |TZ|=7br$ olduğuna göre MTZ üçgeninin
 a) iç teğet çemberinin
 b) çevrel çemberinin yarıçapı kaç birimdir?

$u = \frac{6+7+11}{2} = 12$

$A = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 15} = 6\sqrt{10}$

a) $6\sqrt{10} = a \cdot r$ → $6\sqrt{10} = 12 \cdot r$ → $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$

b) $6\sqrt{10} = \frac{abc}{4R}$ → $6\sqrt{10} = \frac{6 \cdot 11 \cdot 7}{4R}$ → $R = \frac{77}{4\sqrt{10}}$

Yükseklikleri aynı olan üçgenlerde, alanlar tabanlarla doğru orantılıdır
 $\frac{A(MTB)}{A(MBZ)} = \frac{p}{r}$

Tabanlar aynıysa alanlar yüksekliklerle doğru orantılıdır.

Örnek...7 :
 MBZ bir üçgendir. $|MK|=6br$
 $|MB|=4br$ ise, $\frac{A(MLB)}{A(MZB)}$ kaçtır?

$\frac{4A}{10A} = \frac{2}{5}$

Örnek...8 :
 MBZ bir üçgendir.
 $6|SZ|=3|ZL|=6|SM|=12br$
 2S ve 10S verilen bölgelerin alanı ise, x kaçtır?

$\frac{4}{x} = \frac{8S}{4S} \rightarrow x = \frac{2}{5}$

Örnek...9 :
 MTZ bir üçgendir.
 $|S|=|TV|, |GB|, 2|VZ|=|BV|=|MB|$
 ve $2|SV|=|TS|$ göre $\frac{A(BSV)}{A(MTZ)}$ kaçtır?

$A(TVZ) = \frac{3A}{2}$

$\frac{A}{6A+3A/2} = \frac{2}{15/11}$

Bezer iki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir.

Örnek...10 :
 MBZ bir üçgendir.
 $|MB|=6br, |MZ|=5br, |LF|=4br, |ZB|=12br$
 $m(L)=m(B)$ olduğuna göre $A(ZBFL)$ kaçtır?

$A = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}}$

$A = \frac{15\sqrt{7}}{4}$

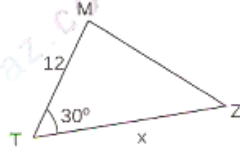
$8A = \frac{8 \cdot 15 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \sqrt{2}} = \frac{30\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{7}$

$\frac{2}{5}$

ÜÇGENDE ALAN-9

DEĞERLENDİRME - 1

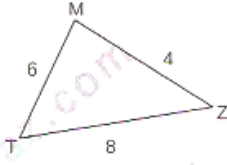
- 1) MTZ bir üçgendir.
 $|MZ|=12br$,
 $m(\hat{T})=30^\circ$ bu
 üçgenin alanı 60
 birim kare ise
 $|TZ|=x$ kaç
 birimdir?



$$60 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 30^\circ$$

$$60 = 3x \rightarrow x = 20$$

- 2) MTZ bir üçgendir.
 $2|MZ|=|TZ|=8br$,
 $|MT|=6$ olduğuna
 göre $A(MTZ)$ kaç
 birim karedir?



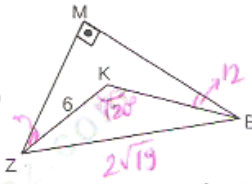
$$A(MTZ) = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 1}$$

$$= 3\sqrt{15}$$

$$u = \frac{8+6+4}{2}$$

$$u = 9$$

- 3) MBZ bir üçgendir.
 $m(\hat{BMZ})=90^\circ$,
 $m(\hat{MZK})=18^\circ$,
 $m(\hat{MBK})=12^\circ$,
 $|KB|=6br$,
 $|BZ|=2\sqrt{19}br$
 olduğuna göre
 $A(KZB)$ birimdir?



$$A(KZB) = \frac{3\sqrt{3} \cdot 4}{2}$$

$$= 6\sqrt{3}$$

$$|HZ| = \sqrt{(2\sqrt{19})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 7$$

- 4) Bir ABC üçgeninde a,b,c kenar uzunlukları
 olmak üzere $c^2=a^2+b^2+ab$ bağıntısı
 geçerliyse üçgenin alanının a ve b cinsinden
 değeri nedir?

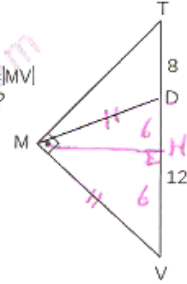
$$c^2 = a^2 + b^2 + ab = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$\cos C = -\frac{1}{2} \quad \hat{C} = 120^\circ$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$$

$$= \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}ab}{4}$$

- 5) MTV bir dik üçgen
 $|TD|=8br$ $|DV|=12br$ dir. $|MD|=|MV|$
 ise, $A(TMD)$ kaç birim karedir?



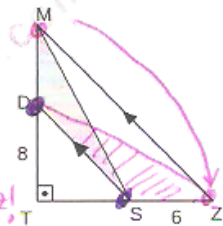
$$[MH] \perp [TV]$$

$$[MH]^2 = 14 \cdot 6$$

$$[MH] = 2\sqrt{21}$$

$$A(TMD) = \frac{8 \cdot 2\sqrt{21}}{2} = 8\sqrt{21}$$

- 6) MTZ bir dik üçgendir.
 $|SZ|=6br$, $|TD|=8$ ise
 $A(MDS)$ kaç birimdir?



$$A(MDS) = A(BSZ)$$

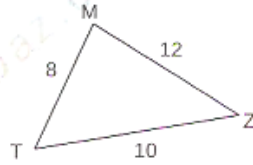
taban ve yükseklikleri
 aynı olduğuna göre!

$$A(MDS) = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

DEĞERLENDİRME - 2

- 1) MTZ bir üçgendir.

$|MZ|=12br$,
 $|MT|=8br$,
 $|TZ|=10br$ ise
 üçgenin çevrel
 çemberinin
 yarıçapı kaç
 birimdir?



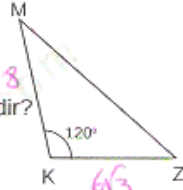
$$u = \frac{8+10+12}{2} = 15$$

$$A = \sqrt{15 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7} = 15\sqrt{7} = \frac{8 \cdot 12 \cdot 10}{4R}$$

$$R = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

- 2) MKZ bir üçgen

$m\widehat{MKZ}=120^\circ$ dir.
 $|MK|=8br$, $|KZ|=6\sqrt{3}br$
 ise, $A(MKZ)$ kaç birim karedir?

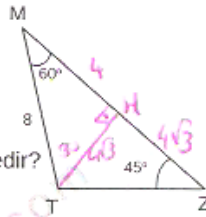


$$A(MKZ) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36$$

- 3) MTZ bir üçgen

$m\widehat{TMZ}=60^\circ$, $m\widehat{TZM}=45^\circ$
 dir. $|MT|=8br$
 ise, $A(MTZ)$ kaç birim karedir?



$$[TH] \perp [MZ]$$

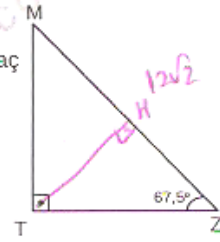
$$A(MTZ) = \frac{4\sqrt{3} \cdot (4+4\sqrt{3})}{2} = 8\sqrt{3} + 24$$

- 4) MTZ bir dik üçgendir.

$|MZ|=12\sqrt{2}br$,
 $m\widehat{Z}=67,5^\circ$ ise $A(MTZ)$ kaç
 birimdir?

$$[TH] = \frac{|MZ| \cdot \sin Z}{2\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 6$$

$$A(MTZ) = \frac{6 \cdot 12\sqrt{2}}{2} = 36\sqrt{2}$$



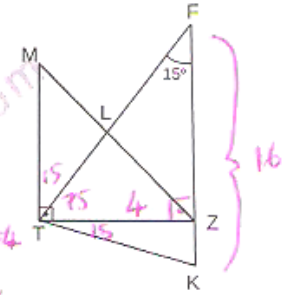
- 5) MTZ bir dik üçgendir.

$[MT] \parallel [FK]$,
 $|FK|=16br$,
 $m\widehat{TFK}=m\widehat{ZTK}=15^\circ$
 Buna göre $A(TFK)$ kaç birim
 karedir?

$$FTK \quad 15 \rightarrow 75 \rightarrow 90$$

$$h = 4h \quad [TH] = 4$$

$$A(TFK) = \frac{4 \cdot 16}{2} = 32$$



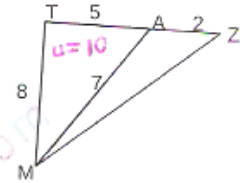
- 6) MTZ bir üçgendir.

Verilen uzunluklara göre
 $A(MZA)$ kaç birim karedir?

$$A(MAT) = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 10\sqrt{3}$$

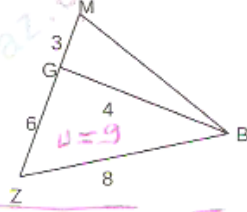
$$\frac{A(MAT)}{A(MAZ)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{10\sqrt{3}}{A(MZA)} = \frac{5}{2}$$

$$A(MZA) = 4\sqrt{3}$$



DEĞERLENDİRME - 3

- 1) MBZ bir üçgendir.
 $2|MG|=|GZ|=6$ br,
 $2|BG|=|BZ|=8$ br ise
 Alan(MBZ) kaç
 birimdir?

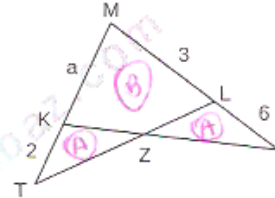


$$A(GZB) = \sqrt{9 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3} = 3\sqrt{15}$$

$$\frac{A(GZB)}{A(GMB)} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{3\sqrt{15}}{A(GMB)} = 2$$

$$A(MBZ) = 3\sqrt{15} + \frac{3\sqrt{15}}{2} = \frac{2\sqrt{15}}{2}$$

- 2) MTL, MKA birer
 üçgendir.
 $K \in [MT], L \in [MA]$
 $A(TKZ) = A(LZA)$,
 verilen uzunluklara
 göre a kaçtır?

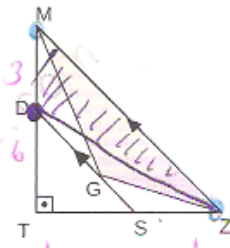


$$A+B = \frac{1}{2} (B+2) \cdot 3 \cdot \sin M$$

$$A+B = \frac{1}{2} 9 \cdot 2 \cdot \sin M$$

$$3a+6=9a \rightarrow \underline{6a=6} \Rightarrow \underline{a=1}$$

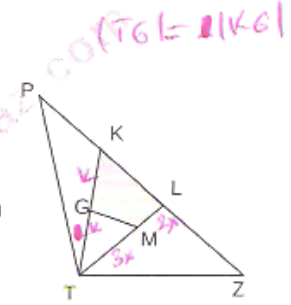
- 3) MTZ bir dik üçgen ve G
 noktası bu üçgenin
 ağırlık merkezidir.
 $|TD|=6$, $|TZ|=8$ ise
 $A(MGZ)$ kaç birimdir?



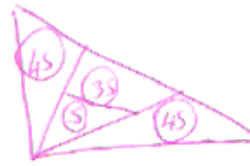
$$\frac{|TD|}{|TM|} = \frac{2}{3} = \frac{6}{|TM|} \Rightarrow |TM|=9 \Rightarrow |AM|=3$$

$$A(MGZ) = A(MDZ) \Rightarrow A(MGZ) = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$$

- 4) PTZ bir üçgendir.
 $|TG|=|KG|$,
 $3|ML|=2|TM|$
 K ve L noktaları [PZ]
 nı üç eş parçaya
 ayırıyorsa taralı alan
 PTZ üçgeninin
 alanının yüzde
 kaçtır?

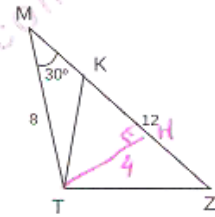


$$\frac{A(TGM)}{A(TKL)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot 3k \cdot \sin(KTL)}{\frac{1}{2} \cdot 6k \cdot 2k \cdot \sin(KTL)} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{3s}{12s} \cdot 100 = \underline{\underline{25\%}}$$

- 5) MTZ bir üçgendir.
 $|MT|=8$ br, $|KZ|=12$ br,
 $m(M)=30^\circ$,
 olduğuna göre $A(KTB)$
 kaçtır?



$$[TH] \perp [MZ]$$

$$|TH| = 8/2 = 4$$

$$A(KTB) = \frac{4 \cdot 12}{2} = \underline{\underline{24}}$$

- 6) Alanı $9\sqrt{3}$ br² olan eşkenar üçgenin iç teğet
 çemberinin yarıçapı kaç birimdir?



$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Rightarrow a=6$$

$$a = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$$

$$a \cdot r = A$$

$$9 \cdot r = 9\sqrt{3} \rightarrow r = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$